9

311hi09

द्विघात समीकरण एवं रैखिक असमिकाएं

स्मरण कीजिए कि एक बीजीय द्विघाती समीकरण सामान्यतः $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के रूप में लिखा जाता है।

इसे x में एक द्विघाती समीकरण कहा जाता है। गुणांक 'a' प्रथम एवं मार्ग दर्शक गुणांक है, 'b' दूसरा अथवा मध्य गुणांक तथा 'c' अचर पद (अथवा तीसरा गुणांक) है।

उदाहरणार्थ $7x^2 + 2x + 5 = 0,\ \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0,$

$3x^2 - x = 0,\ x^2 + \frac{1}{2} = 0,\ \sqrt{2}\,x^2 + 7x = 0$ ये सभी द्विघात समीकरण हैं।

कभी–कभी शाब्दिक समस्या को समीकरण में परिवर्तन करना सम्भव नहीं होता है। आइए निम्न स्थिति पर विचार करें।

आलोक 30 रु लेकर पेन्सिलें खरीदने के लिए बाजार जाता है। एक पेन्सिल का मूल्य 2.60 रु. है। यदि x, उस द्वारा खरीदी जाने वाली पेन्सिलों की संख्या को दर्शाता है, तो वह 2.60 x रु खर्च करेगा। यह राशि 30 रु के बराबर नहीं हो सकती क्योंकि x एक प्राकृत संख्या है। इस प्रकार

$$2.60\,x < 30 \qquad \ldots (i)$$

आइए एक और स्थिति पर विचार करें जिस में एक व्यक्ति के पास 50,000 रु. हैं तथा वह कुर्सियों और मेज़ें खरीदना चाहता है। एक मेज़ का मूल्य 550 रु. तथा एक कुर्सी का मूल्य 450 रु. है। माना x कुर्सियों की संख्या तथा y मेज़ों की संख्या, जो वह खरीदता है, को दर्शाते हैं।

उसका कुल मूल्य = (550 x + 450 y)

इस दशा में, हम लिख सकते हैं कि

$$550x + 450y \le 50{,}000$$

या $\quad 11x + 9y \le 1000 \qquad \ldots (ii)$

कथन (i) में असमिका का चिह्न '<' तथा कथन (ii) में दो कथन सम्मिलित हैं $11x+9y < 1000$, $11x+9y = 1000$ जिसमें पहला समीकरण नहीं है।

ऐसे कथन 'असमिका' कहलाते हैं। इस पाठ में हम रैखिक असमिकाओं की चर्चा करेंगे तथा आहार, व्यापार तथा परिवहन सम्बन्धी समस्याओं को आलेखीय विधि से हल करेंगे।

इस पाठ में हम वास्तविक एवं सम्मिश्र गुणांकों वाले द्विघात समीकरणों के हल करने तथा मूल और गुणांकों के मध्य संबंध स्थापित करने के विषय में चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे

- वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरणों को गुणन खंडन द्वारा तथा द्विघात सूत्र का उपयोग करके हल करना
- मूल तथा गुणांकों में संबंध स्थापित करना
- दिये हुए मूलों से एक द्विघात समीकरण बनाना
- रैखिक समीकरण तथा रैखिक असमीकरण में अन्तर करना
- यह कथन कहना कि समतलीय क्षेत्र एक रैखिक असमिका के हल को प्रदर्शित करता है
- दो चरों में रैखिक असमिकाओं को आलेख द्वारा दर्शाने में
- एक असमिका के हल के उचित क्षेत्र को छायांकित करना
- दो चरों में दो या तीन असमिकाओं को आलेखीय विधि द्वारा हल करना

पूर्व ज्ञान

- वास्तविक संख्याएं
- वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरण
- एक या दो चरों में रैखिक समीकरणों के हल
- एक या दो चरों में रैखिक समीकरणों के तल में आलेख
- दो चरों में रैखिक समीकरण निकाय के आलेखीय हल

9.1 द्विघात समीकरण के मूल

किसी समीकरण में, उसे संतुष्ट करने वाला चर के स्थान पर प्रतिस्थापित मान समीकरण का एक मूल (अथवा हल) कहलाता है।

यदि α द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ ... (i)

का एक मूल हो, तो $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

दूसरे शब्दों में, $x-\alpha$ द्विघात समीकरण (i) का एक गुणनखंड है।

विशेषतया, द्विघात समीकरण $x^2+x-6=0$ पर विचार कीजिए। ...(ii)

यदि (ii) में हम $x = 2$ प्रतिस्थापित करते हैं, तो हमें मिलता है:

बायां पक्ष $= 2^2+2-6=0$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

पुनः (ii) में $x = -3$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

बायां पक्ष $= (-3)^2-3-6=0$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

पुनः (ii) में $x = -1$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

बायां पक्ष $= (-1)^2 + (-1) - 6 = -6 \neq 0$

$\therefore$ बायां पक्ष $\neq$ दायां पक्ष

$\therefore$ $x = 2$ तथा $x = -3$ ही x के दो ऐसे मान हैं जो द्विघात समीकरण (ii) को सन्तुष्ट करते हैं।

दूसरे कोई मान ऐसे नहीं हैं जो (ii) को सन्तुष्ट करते हों।

$\therefore$ द्विघात समीकरण (*ii*) के केवल दो मूल $x = 2$ तथा $x = -3$ हैं।

टिप्पणी: *यदि α, β द्विघात समीकरण*

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \qquad \ldots(A)$$

के दो मूल हों, तो $(x-\alpha)$ तथा $(x-\beta)$ द्विघात समीकरण (A) के गुणनखंड होंगे। दिये हुए द्विघात समीकरण को इन गुणनखंड के पदों में $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

9.2 द्विघात समीकरण को गुणन खंडन द्वारा हल करना

याद कीजिए कि आपने $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, के रूप वाले द्विघात बहुपद के, मध्य पद को तोड़कर उभयनिष्ठ गुणनखंड लेकर, किस प्रकार गुणनखंड किये जाते हैं, यह सीखा था। द्विघात समीकरण को गुणन खंडन द्वारा हल करने में वही विधि अपनाई जाती है।

यदि द्विघात समीकरण

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a \neq 0$ के बायें पक्ष के दो गुणनखंड $x - \frac{p}{q}$ तथा $x - \frac{r}{s}$ हों, तो

$$\left(x - \frac{p}{q}\right)\left(x - \frac{r}{s}\right) = 0$$

$\therefore$ या तो $x = \frac{p}{q}$ या $x = \frac{r}{s}$ होगा।

$\therefore$ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ होंगे।

उदाहरण 9.1. गुणनखंडन विधि के उपयोग से निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $6x^2 + 5x - 6 = 0$

हल: दिया गया द्विघात समीकरण है:

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \qquad \ldots(i)$$

मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$$

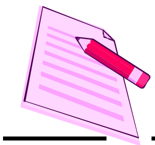
या, $3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

या, $(2x + 3)(3x - 2) = 0$

$\therefore$ या तो $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

या $\quad 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ दिये हुए समीकरण के दो मूल $-\frac{3}{2}$ तथा $\frac{2}{3}$ हैं।



टिप्पणी

उदाहरण 9.2. गुणनखंडन विधि के उपयोग से, निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2} = 0$

हल: मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$3\sqrt{2}x^2 + 9x - 2x - 3\sqrt{2} = 0$$

या, $3x(\sqrt{2}x + 3) - \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 3) = 0$

या, $(\sqrt{2}x + 3)(3x - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore$ या तो $\sqrt{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

या, $3x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ दिए गए द्विघात समीकरण के दो मूल $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ तथा $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ हैं।

उदाहरण 9.3. गुणनखंडन विधि के उपयोग से निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $(a+b)^2x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

हल: दिया गया द्विघात समीकरण है:

$$(a+b)^2x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(a+b)^2x^2 + 3(a^2 - b^2)x + 3(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

या, $(a+b)x\{(a+b)x + 3(a-b)\} + 3(a-b)\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

या, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

$\therefore$ या तो $(a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

या, $(a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

दिये गये द्विघात समीकरण के समान मूल $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$ हैं।

वैकल्पिक विधि

दिया गया द्विघात समीकरण है

$$(a+b)^2x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

इसे हम एक अन्य नीचे दिए गए रूप में लिख सकते हैं:

$$\{(a+b)x\}^2 + 2.(a+b)x.3(a-b) + \{3(a-b)\}^2 = 0$$

या, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}^2 = 0$

या, $x = -\dfrac{3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ दिये गये द्विघात समीकरण के समान मूल $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$ हैं।

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक को गुणन खंडन विधि द्वारा हल कीजिए:

(i) $\sqrt{3}\, x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$ (ii) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

(iii) $x^2 + \left(\frac{ab}{c} - \frac{c}{ab}\right) x - 1 = 0$ (iv) $x^2 - 4\sqrt{2}\, x + 6 = 0$

9.3 द्विघात सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण हल करना

एक मानक द्विघात समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल करने को स्मरण कीजिए।

उपर्युक्त द्विघात समीकरण के मूल हैं:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

जहां पर $D = b^2 - 4ac$ को द्विघात समीकरण का विविक्तकर (Discriminant) कहा जाता है।

एक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0$ के लिए, यदि

(i) D>0, तो समीकरण के दो वास्तविक तथा असमान मूल होंगे।

(ii) D=0, तो समीकरण के दो वास्तविक तथा समान मूल होंगे तथा दोनों मूल $-\frac{b}{2a}$ के बराबर होंगे।

(iii) D<0, तो समीकरण के दो सम्मिश्र (काल्पनिक) संयुग्मी मूल होंगे।

उदाहरण 9.4. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक के मूलों की प्रकृति की जांच कीजिए तथा सूत्र द्वारा सत्यापित कीजिए:

(i) $x^2 + 9x + 10 = 0$ (ii) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ (iii) $\sqrt{2}\, t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

हल: (i) दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$x^2 + 9x + 10 = 0$$

यहां, $a = 1$, $b = 9$ तथा $c = 10$

$\therefore$ $D = b^2 - 4ac = 81 - 4.1.10 = 41 > 0.$

$\therefore$ समीकरण के दो वास्तविक तथा असमान मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$\therefore$ दो मूल $\dfrac{-9+\sqrt{41}}{2}$ तथा $\dfrac{-9-\sqrt{41}}{2}$ हैं जो वास्तविक तथा असमान हैं।

(ii) दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$9y^2 - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$$

यहां, $D = b^2 - 4ac = (-6\sqrt{2})^2 - 4.9.2 = 72 - 72 = 0$

$\therefore$ समीकरण के दो वास्तविक तथा बराबर मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$y = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2.9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$ दो बराबर मूल $\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ हैं।

(iii) दिया हुआ द्विघात समीकरण है: $\sqrt{2}\,t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

यहां, $D = (-3)^2 - 4.\sqrt{2}.3\sqrt{2} = -15 < 0$

$\therefore$ द्विघात के दो सम्मिश्र संयुग्मी मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2\sqrt{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}, \text{ जहां } i = \sqrt{-1}$$

$\therefore$ दो सम्मिश्र संयुग्मी मूल $\dfrac{3+\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$ तथा $\dfrac{3-\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$ हैं।

उदाहरण 9.5. सिद्ध कीजिए कि p के सभी वास्तविक मानों के लिए द्विघात समीकरण $x^2 + px - 1 = 0$ के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

हल: यहां, $D = p^2 + 4$, जो p के सभी वास्तविक मानों के लिए धनात्मक है अर्थात् $D > 0$ है।

$\therefore$ p के सभी वास्तविक मानों के लिए समीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

उदाहरण 9.6. k के किन मानों के लिए द्विघात समीकरण $(4k+1)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ के मूल समान होंगे?

हल: दिया हुआ द्विघात समीकरण है: $(4k+1)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$

यहां, $D = (k+1)^2 - 4.(4k+1).1$

समान मूलों के लिए $D = 0$

$\therefore$ $(k+1)^2 - 4(4k+1) = 0$

$\Rightarrow$ $k^2 - 14k - 3 = 0$

$\therefore$ $k = \dfrac{14 \pm \sqrt{196+12}}{2}$ या, $k = \dfrac{14 \pm \sqrt{208}}{2} = 7 \pm 2\sqrt{13}$

अत: $7 + 2\sqrt{13}, 7 - 2\sqrt{13}$

k के वांछित मान हैं।

उदाहरण 9.7. सिद्ध कीजिए कि a, b, c, d के सभी वास्तविक मानों के लिए द्विघात समीकरण $x^2(a^2+b^2)+2x(ac+bd)+(c^2+d^2)=0$ के मूल काल्पनिक हैं। किन्तु यदि ad = bc हो, तो मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

हल: दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$x^2(a^2+b^2)+2x(ac+bd)+(c^2+d^2)=0$$

विविक्तकर $= 4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 8\,abcd-4(a^2d^2+b^2c^2)$

$= -4(-2\,abcd+a^2d^2+b^2c^2)$

$= -4(ad-bc)^2 < 0$, a, b, c, d के सभी वास्तविक मानों के लिए

$\therefore$ दिए हुए समीकरण के मूल काल्पनिक हैं।

वास्तविक तथा समान मूलों के लिए, विविक्तकर शून्य के बराबर होगा।

$\Rightarrow$ $-4(ad-bc)^2=0$

या, $ad = bc$

अतएव, यदि ad=bc, मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 9.2

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक को द्विघात सूत्र द्वारा हल कीजिए:

   (i) $2x^2-3x+3=0$ (ii) $-x^2+\sqrt{2}x-1=0$

   (iii) $-4x^2+\sqrt{5}x-3=0$ (iv) $3x^2+\sqrt{2}x+5=0$

2. k के किन मानों के लिए समीकरण

   $y^2-2(1+2k)y+3+2k=0$

   के मूल समान होंगे?

3. दर्शाइए कि समीकरण $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ के मूल सर्वदा वास्तविक होंगे तथा यह तब तक समान नहीं होंगे जब तक कि a = b = c न हो।

9.4 एक द्विघात समीकरण के मूलों और गुणांकों में संबंध

आपने सीखा है कि द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

के मूल $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं।

मान लीजिए $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ...(i) तथा $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ... (ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{b}{a}$ ... (iii)

अब (i) तथा (ii) को परस्पर गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\alpha\,\beta = \frac{+b^2 - (b^2 - 4\,ac)}{4a^2} = \frac{4\,ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{c}{a}$ ...(iv)

(iii) तथा (iv) एक दिए हुए द्विघात समीकरण के मूलों तथा गुणांकों में वांछित संबंध प्रदान करते हैं। ये संबंध, जिस द्विघात समीकरण के मूल दिए हुए हों, उसे ज्ञात करने में सहायता प्रदान करते हैं।

उदाहरण 9.8. यदि α, β समीकरण $3x^2 - 5x + 9 = 0$ के मूल हों, तो

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: (a) यह दिया है कि α, β द्विघात समीकरण $3x^2 - 5x + 9 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore$ $\alpha + \beta = \dfrac{5}{3}$ ... (i)

तथा $\alpha\beta = \dfrac{9}{3} = 3$ ... (ii)

अब, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 2.3 = -\dfrac{29}{9}$ [(i) तथा (ii) से]

$\therefore$ वांछित मान $-\dfrac{29}{9}$ है।

(b) अब, $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \dfrac{\frac{-29}{9}}{9} = -\dfrac{29}{81}$ [(i) तथा (ii) से]

उदाहरण 9.9. यदि समीकरण $3y^2 + 4y + 1 = 0$ के मूल α, β हों, तो एक ऐसा द्विघात समीकरण बनाइए, जिसके मूल α^2, β^2 हैं।

हल: यह दिया है कि α, β द्विघात समीकरण $3y^2 + 4y + 1 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore$ मूलों का योगफल, अर्थात्

$$\alpha + \beta = -\frac{y \text{ का गुणांक}}{y^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{4}{3} \quad \text{... (i)}$$

मूलों का गुणनफल, अर्थात्

$$\alpha\,\beta = \frac{\text{अचर पद}}{y^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{1}{3} \quad \text{... (ii)}$$

अब, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2.\frac{1}{3}$ [(i) तथा (ii) से]

$$= \frac{16}{9} - \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

तथा $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \frac{1}{9}$ [(ii) से]

$\therefore$ वांछित द्विघात समीकरण है; $y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)y + \alpha^2\beta^2 = 0$

अथवा, $y^2 - \frac{10}{9}y + \frac{1}{9} = 0$

अथवा, $9y^2 - 10y + 1 = 0$

उदाहरण 9.10. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ का एक मूल दूसरे का वर्ग हो, तो सिद्ध कीजिए कि $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

हल: मान लीजिए कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\alpha,\ \alpha^2$ हैं।

$\therefore$ $\alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}$ ... (i)

तथा $\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a}$ अर्थात् $\alpha^3 = \frac{c}{a}$ . ... (ii)

(i) से हमें मिलता हैं:

$$\alpha(\alpha + 1) = -\frac{b}{a}$$

या, $\{\alpha(\alpha+1)\}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 = -\frac{b^3}{a^3}$

या, $\alpha^3(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) = -\frac{b^3}{a^3}$

या, $\frac{c}{a}\left\{\frac{c}{a} + 3\left(-\frac{b}{a}\right) + 1\right\} = -\frac{b^3}{a^3}$ ... [(i) तथा (ii) से]

या, $\frac{c^2}{a^2} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^3}{a^3}$

या, $ac^2 - 3abc + a^2c = -b^3$

या, $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

जो वांछित परिणाम है।

उदाहरण 9.11. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिस से समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $m : n$ के अनुपात में हों।

टिप्पणी

हल: मान लीजिए समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $m\alpha$ तथा $n\alpha$ हैं।

अब, $m\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a}$ ... (i)

तथा $mn\alpha^2 = \frac{c}{a}$ ... (ii)

(i) से हमें मिलता है: $\alpha\,(m+n) = -\frac{b}{a}$

या, $\alpha^2\,(m+n)^2 = \frac{b^2}{a^2}$

या, $\frac{c}{a}\,(m+n)^2 = mn\,\frac{b^2}{a^2}$ [(ii) से]

या, $ac\,(m+n)^2 = mn\,b^2$

जो वांछित प्रतिबन्ध है।

देखें आपने कितना सीखा 9.3

1. यदि समीकरण $ay^2 + by + c = 0$ के मूल α, β हों, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4}$

2. यदि समीकरण $5x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूल α, β हों, तो एक द्विघात समीकरण बनाइए जिसके मूल हों:

   (i) α^2, β^2 (ii) $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$

3. यदि समीकरण $ay^2 + by + c = 0$ के मूल 3:4 के अनुपात में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $12b^2 = 49\,ac$

4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण $px^2 - qx + p = 0$ का एक मूल दूसरे से 1 अधिक हो।

9.5 एक द्विघात समीकरण का हल जब कि $D < 0$

आइए निम्नलिखित द्विघात समीकरणों पर विचार करें:

(a) t के लिए हल कीजिए:

$t^2 + 3t + 4 = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

यहां, $D = -7 < 0$ है।

$\therefore$ मूल हैं: $\dfrac{-3+\sqrt{-7}}{2}$ तथा $\dfrac{-3-\sqrt{-7}}{2}$ या, $\dfrac{-3+\sqrt{7}\,i}{2}$ तथा $\dfrac{-3-\sqrt{7}\,i}{2}$

इस प्रकार, मूल सम्मिश्र तथा संयुग्मी हैं।

(b) y के लिए हल कीजिए: $-3y^2 + \sqrt{5}\,y - 2 = 0$

$$\therefore \quad y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5-4(-3).(-2)}}{2(-3)} \quad \text{या,} \quad y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{-19}}{-6}$$

यहां, $D = -19 < 0$

$\therefore$ मूल हैं: $\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{19}i}{-6}, \dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{19}i}{-6}$

यहां पर भी मूल सम्मिश्र तथा संयुग्मी हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं:

(i) दोनों दशाओं से $D < 0$

(ii) मूल सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी हैं।

क्या यह सर्वदा सत्य है कि सम्मिश्र मूल संयुग्मी जोड़ों में ही होते हैं?

आइए एक द्विघात समीकरण बनाएं जिसके मूल

$2 + 3i$ तथा $4 - 5i$ हों। समीकरण होगा

$\{x - (2 + 3i)\}\,\{x - (4 - 5i)\} = 0$

अथवा, $x^2 - (2 + 3i)x - (4 - 5i)x + (2 + 3i)(4 - 5i) = 0$

अथवा, $x^2 + (-6 + 2i)x + 23 + 2i = 0$

जो कि सम्मिश्र गुणांकों में एक समीकरण है।

***टिप्पणी:** यदि द्विघात समीकरण के दो सम्मिश्र मूल परस्पर संयुग्मी न हों, तो द्विघात समीकरण सम्मिश्र गुणांकों वाला समीकरण होता है।*

9.6 बीजगणित की आधरभूत प्रमेय (सिद्धान्त)

शायद आपकी रूचि ''एक समीकरण के कितने मूल होते हैं'' जानने में हो सकती है।

बीजगणितीय आधारभूत प्रमेय (बिना प्रमाण) के अनुसार ''एक बहुपद समीकरण का कम से कम एक मूल होता है।''

इसी सिद्धान्त के परिणामस्वरूप 'n' घात के एक बहुपद के 'n' ही मूल होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 9.4

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल करें

(1) $-x^2 + x + 2 = 0$

(2) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

(3) $x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$

(4) $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

(5) $x^2 + 3x + 5 = 0$

9.7 असमिका (असमीकरण)

इस पाठ में हम रैखिक असमिकाओं (असमीकरणों) के बारे में और चर्चा करेंगे तथा दैनिक जीवन में इनके अनुप्रयोग के बारे में अध्ययन करेंगे।

एक कथन जिसमें समानता का चिह्न (=) होता है, उसे समीकरण कहते हैं।

इसी प्रकार एक कथन जिसमें असमिका का चिह्न <, >, ≤, या ≥ हो, एक असमिका कहलाता है।

असमिकाओं के कुछ उदाहरण हैं :

(i) $2x + 5 > 0$

(ii) $3x - 7 < 0$

(iii) $ax + b \geq 0, a \neq 0$

(iv) $ax + b \leq c, a \neq 0$

(v) $3x + 4y \leq 12$

(vi) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(vii) $ax + by + c \geq 0$

(v) तथा (vii) दो चरों में असमीकरण हैं तथा शेष सभी एक चर में असमीकरण हैं। (i) से (v) तक तथा (vii) रैखिक असमीकरण हैं जबकि (vi) एक द्विघात असमीकरण है।

इस पाठ में हम केवल एक या दो चरों में असमीकरणों के बारे पढ़ेंगे।

9.8 एक या दो चरों में रैखिक असमिकाओं के हल

एक असमिका को हल करने का अर्थ है कि चर (चरों) का मान (के मान) ज्ञात करना, जिन्हें जब असमिका में रखें तो वह सन्तुष्ट हो जाए।

उदाहरणार्थ कथन (i) में असमिका $2.60x<30$ के $x \leq 11$ सभी मान इसके हल हैं! (x पूर्ण संख्या है)

असमिका $2x + 16>0$, जहाँ कि x एक वास्तविक संख्या है, -8 से बड़ी सभी संख्याएँ x का मान हो सकती हैं तथा इसके हल हैं।

दो चरों में रैखिक असमिका $ax + by + c \geq 0$, के लिए हमें x तथा y के मानों के युग्म ज्ञात करने होंगे जिनके लिए असमिका सत्य हो।

आइए निम्न स्थिति पर विचार करें :

अनिल के पास 60 रु. हैं तथा वह एक दुकान से पेन और पेन्सिलें खरीदना चाहता है। एक पेन का मूल्य 5 रु तथा एक पेन्सिल का मूल्य 3 रु है। यदि x पेनों की संख्या, तथा y पेंन्सिलों की संख्या, जो अनिल खरीदता है, को दर्शाता हो, तो हमारे पास असमिका $5x + 3y \leq 60$ है ... (i)

यहाँ पर $x = 6$, $y = 10$ असमिका (i). का एक हल है इस प्रकार $x = 5$, $y = 11$; $x = 4$, $y = 13$; $x = 10$, $y = 3$ असमिका के कुछ हल हैं।

असमिका हल करते समय हम निम्न नियमों का पालन करते हैं :

1. एक असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी (या घटाई) जा सकती है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तब $a + c > b + c$ तथा $a - c > b - c$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तब $a + d \leq b + d$ तथा $a - d \leq b - d$

2. असमिका के दोनों पक्षों को एक धनात्मक संख्या से गुणा (या भाग) किया जा सकता है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तथा $c > 0$ तब $ac > bc$ और $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तथा c > 0 तब $ac \leq bc$ और $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

3. जब एक असमिका के दोनों पक्षों को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा किया जाए तो असमिका का चिह्न बदल जाता है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तथा $d < 0$ हो, तो $ad < bd$ और $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तथा $c < 0$ हो, तो $ac \geq bc$ और $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

9.9 एक या दो चरों में रैखिक असमिका का आलेखीय निरूपण

अनुच्छेद 9.2 में, पेनों तथा पेन्सिलों के खरीदने की समस्या को असमीकरण में परिवर्तन करने पर, हमें निम्न असमीकरण प्राप्त हुआ।

$5x + 3y \leq 60$ .... (i)

यह ध्यान रखते हुए कि x तथा y पूर्ण संख्याएँ हैं, आइए इस असमिका के सभी हल ज्ञात करें।

आरम्भ करने के लिए, माना $x = 0$.

$\therefore\ 3y \leq 60$ या $y \leq 20$,

अर्थात् $x = 0$ के संगत y के मान केवल 0,1,2,3..........., 20 हो सकते हैं। इस प्रकार $x = 0$ के साथ हल हैं।

(0,0), (0,1), (0,2) ......(0, 20)

इसी प्रकार असमीकरण के अन्य हल हैं जब $x = 1,2, \ldots 12$

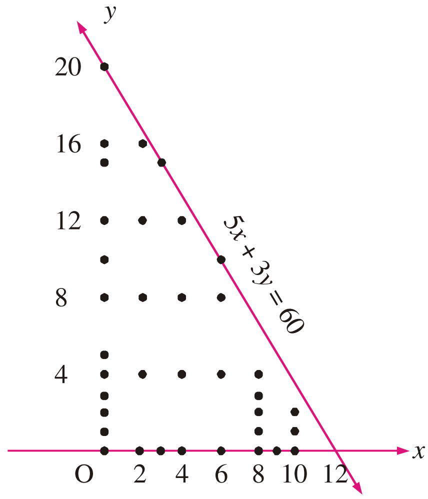
(1,0) (1,1) (1,2) ...... (1,18)

(2,0) (2,1) (2,2) ...... (2,16)

....

....

(10,0) (10,1) (10,2), (10,3)
(11,0) (11,1)
(12,0)



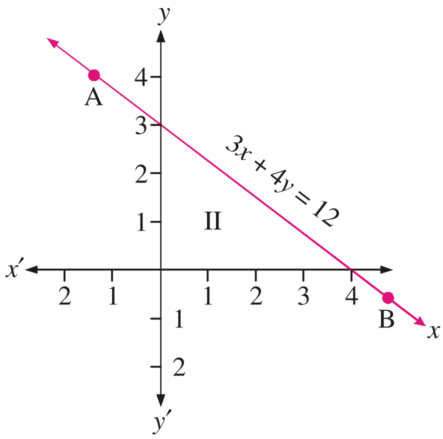
चित्र 9.1

आप देख सकते हैं कि उपरोक्त क्रमित युग्मों में से कुछ युग्म (0,20), (3, 15), (6, 10), (9, 5), (12,0) समीकरण $5x + 3y = 60$ को सन्तुष्ट करते हैं जो कि दिए गए असमिका का भाग है तथा शेष सम्भावित हल, रेखा $5x + 3y = 60$ द्वारा xy - तल को दो भागों में विभाजित **अर्ध समतलों में से किसी एक** में स्थित हैं।

यदि हम x तथा y के प्रान्त का, पूर्ण संख्या से वास्तविक संख्याओं में विस्तार कर दें, तो असमिका $5x + 3y \leq 60$ उन दो अर्ध समतलों में से एक अर्धसमतल को, निर्धारित करेगा, जिनमें रेखा $5x + 3y = 60$, xy- तल को विभाजित करती है।

अतः हम इसे व्यापक परिणाम के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

यदि a,b,c वास्तविक संख्याएँ हैं तब $ax + by + c = 0$ दो चरों x तथा y में एक समीकरण कहलाता है जबकि $ax + by + c \leq 0$ या $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c > 0$ तथा $ax + by + c < 0$ दो चरों में रैखिक असमिकाएँ कहलाती हैं।



चित्र 9.2

समीकरण $ax + by + c = 0$ एक सरल रेखा है जा xy समतल को दो अर्धसमतलों में विभाजित करती है जिन्हें $ax + by + c \geq 0$ तथा $ax + by + c \leq 0$ दर्शाते हैं।

उदाहरणार्थ रेखा AB $3x + 4y - 12 = 0$, निर्देशाँक समतल को दो अर्धसमतलीय क्षेत्रों में विभाजित करती है।

(i) रेखा AB से ऊपर का अर्धसमतल I

(ii) रेखा AB के नीचे का अर्धसमतल II एक क्षेत्र $3x + 4y - 12 \leq 0$ ...(i) को तथा दूसरा क्षेत्र $3x + 4y - 12 \geq 0$. ... (ii) को प्रदर्शित करेगा।

असमिका (i) के संगत अर्धसमतल की पहचान करने के लिए हम एक स्वेच्छ बिन्दु, अधिकतर मूल बिन्दु यदि यह रेखा AB पर न हो, लेते हैं। यदि बिन्दु असमिका (i) को सन्तुष्ट करता है, तब वह अर्धसमतल जिसमें स्वेच्छ बिन्दु है, अभीष्ट अर्धसमतल है। इस दशा में, मूल बिन्दु को स्वैच्छिक बिन्दु लेकर,

$0+0-12 \leq 0$ अर्थात् $-12 \leq 0$

इस प्रकार मूलबिन्दु असमीकरण $3x + 4y - 12 \leq 0$ को सन्तुष्ट करता है। अब मूल बिन्दु अर्धसमतल II में स्थित है। अतः असमिका $3x + 4y - 12 \leq 0$ अर्धसमतल II को दर्शाती है तथा $3x + 4y - 12 \geq 0$ अर्धसमतल I को दर्शाएगी।

उदाहरण 9.12. असमिका $x + 2y \geq 5$ द्वारा निर्धारित क्षेत्र आलेख में दर्शाइए।

हल : पहले हम संगत समीकरण $x + 2y \geq 5$ लेकर इसका आलेख खींचेंगे।

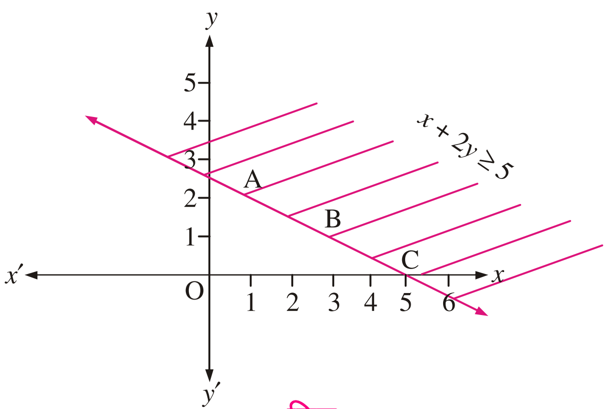
x	1	3	5
y	2	1	0

क्योंकि (0,0) रेखा AB पर नहीं है, इस लिए हम (0,0) को स्वेच्छ बिन्दु मान सकते हैं।

$\because$ $0 + 0 \geq 5$ सत्य नहीं है।

$\therefore$ अभीष्ट अर्धसमतल वह है जिसमें मूलबिन्दु नहीं है।

अभीष्ट अर्धसमतल को चित्र 9.3 में छायांकित किया गया है।



चित्र 9.3

अन्य उदाहरण लेने से पहले, हम निम्न को परिभाषित करते हैं :

(i) **संवृत अर्धसमतल** : एक अर्धसमतल को संवृत अर्धसमतल कहा जाता है कि उस रेखा के सारे बिन्दु, जो दो अर्धसमतलों को अलग करती है, असमीकरण के हल में सम्मिलित हैं। उदाहरण 6.1 में अर्धसमतल संवृत अर्धसमतल है।

(ii) **विवृत (खुला) अर्धसमतल** : $x\ y$ समतल में एक अर्धसमतल को विकृत अर्धसमतल कहा जाता है यदि अर्धसमतलों को अलग करने वाली रेखा के बिन्दुओं को अर्धसमतल में सम्मिलित न किया जाए।

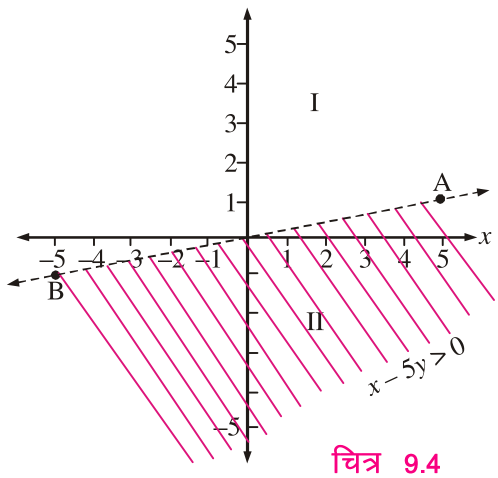
उदाहरण 9.13. असमिका $x - 5y > 0$ का आलेख खींचिए।

हल : दी गई असमिका है: $x - 5y > 0$

संगत समीकरण है : $x - 5y = 0$

हम निम्न सारणी बनाते हैं :

x	0	5	–5
y	0	1	–1



चित्र 9.4

रेखा AOB, xy समतल को दो अर्धसमतलों I तथा II में विभाजित करती है। क्योंकि रेखा AOB मूल बिन्दु से गुजरती है हम कोई अन्य बिन्दु, माना (3,4) स्वेच्छ बिन्दु लेते हैं। आइए देखें कि क्या यह असमीकरण $x - 5y > 0$ संतुष्ट करता है।

अब $3 - 5(4) > 0$ या $3 - 20 > 0$, या $-17 > 0$, जो कि सत्य नहीं है।

$\therefore$ अभीष्ट अर्धसमतल II है।

क्योंकि असमिका पूर्ण असमिका $x - 5y > 0$ है

$\therefore$ रेखा AOB आलेख का भाग नहीं है

अतः इस रेखा को बिन्दुदार रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

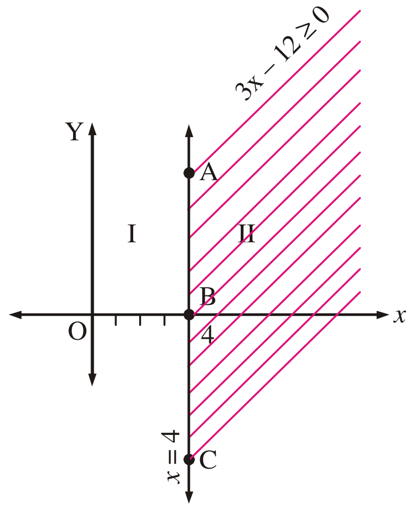
अतः दी गई असमिका का आलेख रेखा AOB को छोड़कर छायांकित क्षेत्र है।

उदाहरण 9.14

असमिका $3x - 12 \geq 0$ को आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

हल : दी गई असमिका $3x - 12 \geq 0$ है। इसके संगत समीकरण $3x - 12 = 0$ या $x - 4 = 0$ या $x = 4$ है जिसे xy तल में रेखा ABC द्वारा दर्शाया गया है। (चित्र 9.5).

(0,0) को स्वैच्छिक बिन्दु लेकर, हम देख सकते हैं कि $0 \ngeq 4$ अतः अर्धसमतल II असमिका $3x - 12 \geq 0$ को दर्शाता है।



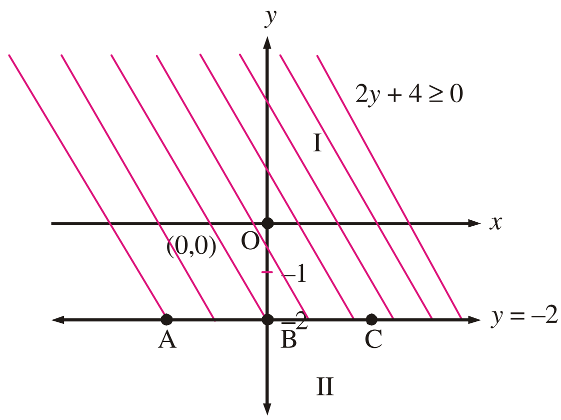
चित्र 9.5

उदाहरण 9.15. असमिका $2y + 4 \geq 0$ को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

हल : असमिका $2y + 4 \geq 0$ के संगत समीकरण $2y + 4 = 0$ या $y = -2$ है।

रेखा ABC समीकरण $y = -2$ को दर्शाती है तथा xy समतल को दो अर्धसमतलों में विभाजित करती है।

$2y + 4 \geq 0$ अर्धसमतल I को दर्शाती है!



चित्र 9.6

देखें आपने कितना सीखा 9.5

द्विविम तल में निम्नलिखित असमिकाओं में से प्रत्येक के हल आलेखीय विधि से दर्शाइए :

1.	$2x + y \geq 8$	2.	$x - 2y \leq 0$
3.	$3x + 6 \geq 0$	4.	$8 - 2y \geq 2$
5.	$3y \geq 6 - 2x$	6.	$3x \geq 0$
7.	$y \leq 4$	8.	$y > 2x - 8$

9. $-y < x - 5$ 10. $2y \le 8 - 4x$

9.10 दो चरों में रैखिक असमिका निकाय के आलेखीय हल

आप पहले ही जानते हैं कि दो चरों में रैखिक समीकरण निकाय को कैसे हल किया जाता है।

अब आप दो चरों में रैखिक असमिका को आलेख द्वारा हल करना सीख चुके हैं। अब हम युगपत रैखिक असमिका निकाय को हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे। युगपत रैखिक असमिका निकाय के हल का अर्थ सभी क्रमित (x, y) ज्ञात करना है, जिनके लिए निकाय की प्रत्येक रैखिक असमिका संतुष्ट हो।

रैखिक असमिका निकाय का या तो कोई भी हल नहीं होगा या उसके ऐसे अनन्त हल होंगे, जो रैखिक समीकरणों की संगत रेखाओं से सम्बन्धित सीमित या असीमित क्षेत्र दर्शाता है।

इस विधि को स्पष्ट करने के लिए हम निम्न उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9.16. आलेखीय विधि से निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए:

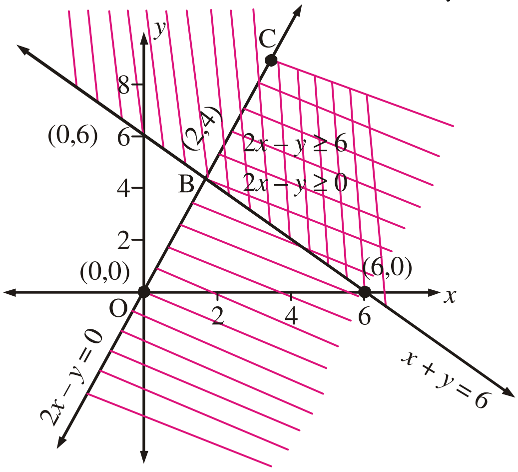
$$x + y \ge 6, \qquad 2x - y \ge 0.$$

हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

$$x + y \ge 6 \;.....\; \text{(i)}$$

तथा $2x - y \ge 0 \;.....\; \text{(ii)}$

हम रेखाओं $x + y = 6$ तथा $2x - y = 0$ के आलेख खींचते हैं (चित्र. 9.7)



चित्र 9.7

असमिका (i) रेखा $x + y = 6$ के ऊपर छायांकित क्षेत्र को निरूपित करती है तथा असमिका (ii) रेखा $2x - y = 0$ के दाईं ओर के क्षेत्र को निरूपित करती है।

चित्र 9.7 में, दोहरा छायांकित उभयनिष्ठ क्षेत्र दिए गए असमिका निकाय का हल है।

उदाहरण 9.17. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$x + y \le 5, \qquad 4x + y \ge 4, \qquad x + 5y \ge 5, \qquad x \le 4, \; y \le 3.$$

हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

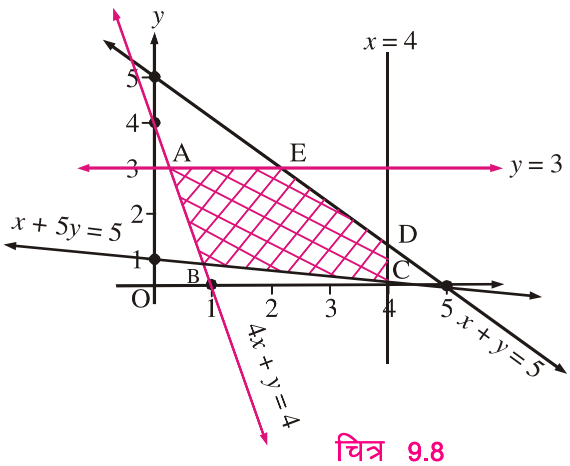
$x + y \le 5$ ..... (i)

$4x + y \ge 4$ ..... (ii)

$x + 5y \ge 5$ ..... (iii)

$x \le 4$ ..... (iv)

तथा $y \le 3$ ..... (v)



चित्र 9.8

हम रेखाओं $x + y = 5$, $4x + y = 4$, $x + 5y = 5$, $x = 4$ तथा $y = 3$ के आलेख खींचते हैं (चित्र. 6.8)

असमिका (i) रेखा $x + y = 5$ के नीचे के क्षेत्र को निरूपित करती है। असमिका (ii) समीकरण $4x + y = 4$ के दाईं ओर के क्षेत्र को निरूपित करती है। समीकरण $x + 5y = 5$ के ऊपर के क्षेत्र को असमिका (iii). निरूपित करती है। इसी प्रकार (iv) तथा (v) के क्षेत्रों को छायांकित कर हम उभयनिष्ठ क्षेत्र **ABCDE** प्राप्त करते हैं (चित्र 9.8)। इस क्षेत्र के सारे बिन्दु दिए गए समीकरण निकाय के हल को संतुष्ट करते हैं तथा इसलिए दिए गए निकाय के हल को प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 9.18. आलेखीय विधि से निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए :

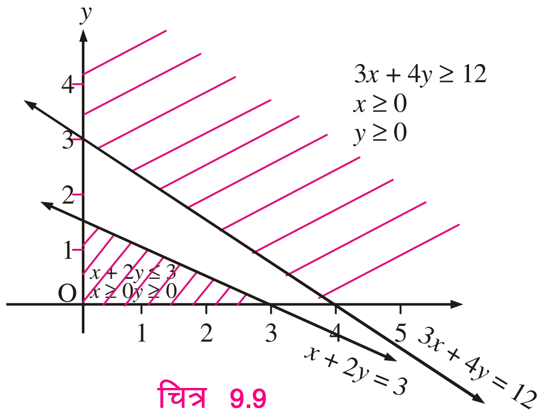
$x + 2y \le 3,\ 3x + 4y \ge 12,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0.$

हल : हम असमिकाओं $x + 2y \le 3$,

$3x + 4y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ के संगत क्षेत्रों को छायांकित कर इनके आलेख को दिखाते हैं।

हम पाते है कि कोई उभयनिष्ठ क्षेत्र नहीं है।

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिए गए रैखिक असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।



चित्र 9.9

उदाहरण 9.19. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$x - y < 2,\ \ 2x + y < 6;\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

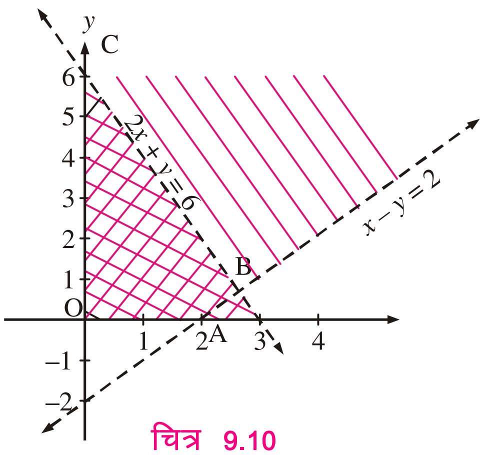
हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

$x - y < 2$ ... (i)

$2x + y < 6$ ... (ii)

$x \ge 0\ ;\ y \ge 0$ ... (iii)

असमिकाओं $x - y < 2$, $2x + y < 6$, $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ को ग्राफ पर निरूपित करने के बाद हम पाते हैं कि उभयनिष्ठ क्षेत्र *OABC* है। (चित्र 9.10)



चित्र 9.10

देखें आपने कितना सीखा 9.6

निम्नलिखित में प्रत्येक दो चरों में रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

1. $x \geq 3,\ y \geq 1.$
2. $y \geq 2x, y \leq 2.$
3. $2x + y - 3 \geq 0, x - 2y + 1 \leq 0.$
4. $3x + 4y \leq 12, 4x + 3y \leq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
5. $2x + 3y \geq 3, 3x + 4y \leq 18,\ 7x - 4y + 14 \geq 0,\ x - 6y \leq 3,\ x \geq 0, y \geq 0$
6. $x + y \geq 9, 3x + y \geq 12, x \geq 0,\ y \geq 0$
7. $x + y \geq 1; 2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0.$
8. $x + 3y \geq 10; x + 2y \leq 3, x - 2y \leq 2, x \geq 0 ; y \geq 0$

आइये दोहराएँ

- यदि $D < 0$, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी होते हैं।
- यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तो $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
- यदि α तथा β किसी द्विघात समीकरण के मूल हैं तो वह द्विघात समीकरण होगा:
  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
- एक समीकरण के मूलों की अधिकतम संख्या, उस समीकरण की घात के बराबर होता है।
- एक कथन जिसमें चिह्न $<, >, \leq, \geq$, एक असमिका कहलाता है।
- समीकरण $ax + by + c = 0$ एक सरल रेखा है जो xy तल को दो अर्धतलों में विभाजित करता है जो कि $ax + by + c \geq 0$ तथा $ax + by + c \leq 0$ द्वारा निरूपित होते हैं।
- रैखिक असमिका निकाय के हल का अर्थ है कि सभी क्रमित युग्म (x, y) ज्ञात करना जो निकाय की प्रत्येक रैखिक असमिका को सन्तुष्ट करते हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=lSwG-S7tLFo*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Tq0mCZxjKXk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=rwTwKsxkTRI*
- *https://www.youtube.com/watch?v=5jSuC-sxe74*
- *https://www.youtube.com/watch?v=gmONf1mcEXA*

आइए अभ्यास करें

1. यदि $a \neq b$, तो दर्शाइये कि समीकरण

   $2(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+1=0$ के मूल काल्पनिक होंगे।

2. यदि समीकरण $ax^2+b(2x+1)=0$ के मूल काल्पनिक हों, तो दर्शाइये कि समीकरण

   $bx^2+(b-c)x=c+a-b$ के मूल सर्वदा वास्तविक होंगे।

3. यदि समीकरण $2x^2-6x+5=0$ के मूल α, β हों, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल हैं:

   (i) $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \beta+\dfrac{1}{\alpha}$ (iii) $\alpha^2+\beta^2, \dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$

4. $x \geq -2$ 5. $y \leq 2$. 6. $x < 3$ 7. $y \geq -3$

8. $5-3y \geq -4$ 9. $2x-5 \leq 3$. 10. $3x-2y \leq 12$ 11. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5} \geq 1$.

12. $2x-3y \geq 0$ 13. $x+2y \leq 0$.

निम्नलिखित दो चरों में रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

14. $-1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 4$.

15. $2x+3y \leq 6,\ \ 3x+2y \leq 6$.

16. $6x+5y \leq 150$,

    $x+4y \leq 80$

    $x \leq 15,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

17. $3x+2y \leq 24,\ x+2y \leq 16$

    $x+y \leq 10,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

18. $x+y \geq 3,\ \ 7x+6y \leq 42$

    $x \leq 5, \quad y \leq 4$

    $x \geq 0, \quad y \geq 0$

19. $\dfrac{3(x-2)}{5} \leq \dfrac{5(2-x)}{3}$

20. $37-(3x+5) \geq 9x-8(x-3)$

21. $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

22. $5x + 1 > -24,\ 5x - 1 < 24$

23. $3x - 7 > 2(x - 6),\ 6 - x > 11 - 2x$

24. $5(2x - 7) - 3\,(2x + 3) \leq 0,\ 2x + 19 \leq 6x + 47$

25. 8% बोरिक अम्ल के एक विलयन में 2% बोरिक अम्ल को मिलाकर अम्लीय मात्रा को कम किया गया। प्राप्त मिश्रण में बोरिक अम्ल 2% से अधिक तथा 4% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% बोरिक अम्ल का 640 लीटर विलयन हो तो उसमें कितने लीटर 2% बोरिक अम्ल का विलयन मिलाना होगा?

26. 45% अम्लीय मात्रा के 1125 लीटर विलयन में कितने लीटर पानी मिलाएं कि प्राप्त विलयन में अम्ल की मात्रा 25% से अधिक तथा 30% से कम हो?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. (i) $-2\sqrt{3},\ \frac{-4}{\sqrt{3}}$ (ii) $a-\sqrt{b},\ a+\sqrt{b}$

   (iii) $-\frac{ab}{c},\ \frac{c}{ab}$ (iv) $3\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 9.2

1. (i) $\frac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{4}$ (ii) $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

   (iii) $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{43}\,i}{8}$ (iv) $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{58}\,i}{6}$

2. $-1,\ \frac{1}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 9.3

1. (i) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ (ii) $\frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2a^2c^2}{c^4}$

2. (i) $25x^2 - 6x + 9 = 0$ (ii) $625x^2 - 90x + 81 = 0$

4. $q^2 - 5p^2 = 0$

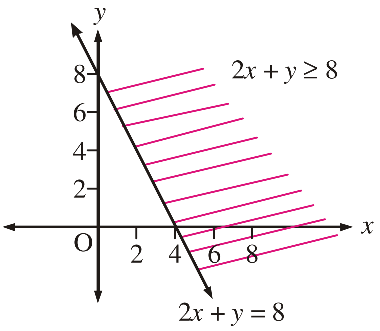
देखें आपने कितना सीखा 9.4

1. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}i}{2}$ 3. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$

4. $\frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$ 5. $\frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

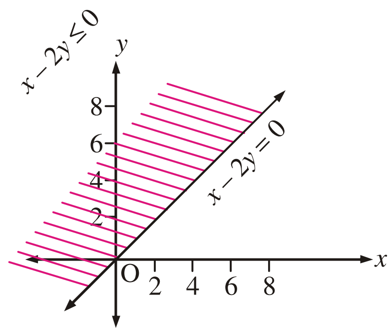
देखें आपने कितना सीखा 9.5

1.



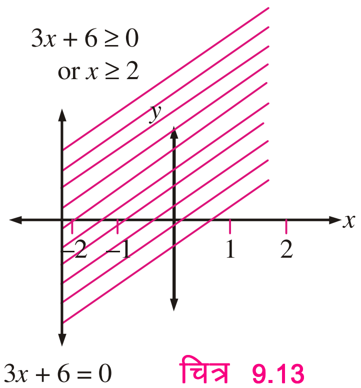
चित्र 9.11

2.



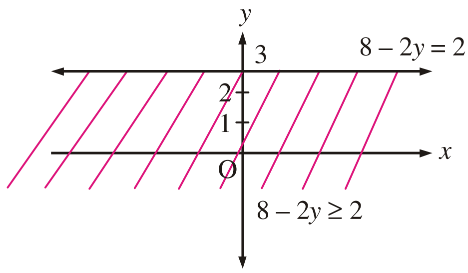
चित्र 9.12

3.



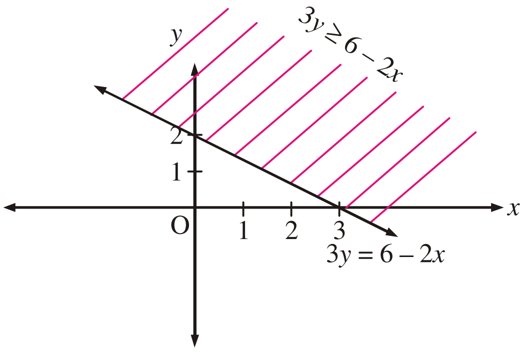
चित्र 9.13

4.



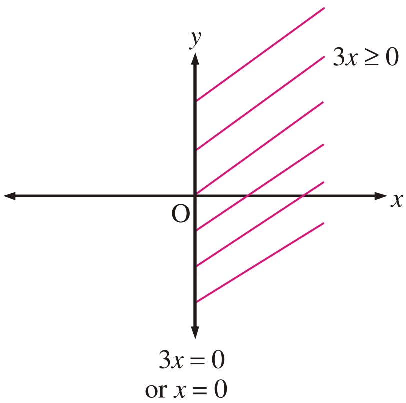
चित्र 9.14

5.

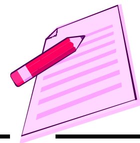


चित्र 9.15

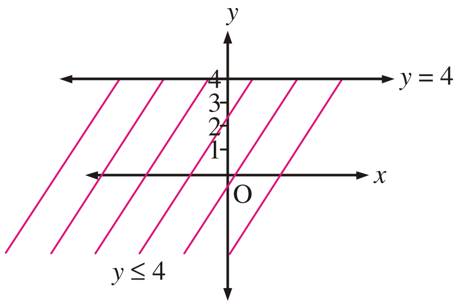
6.



चित्र 9.16

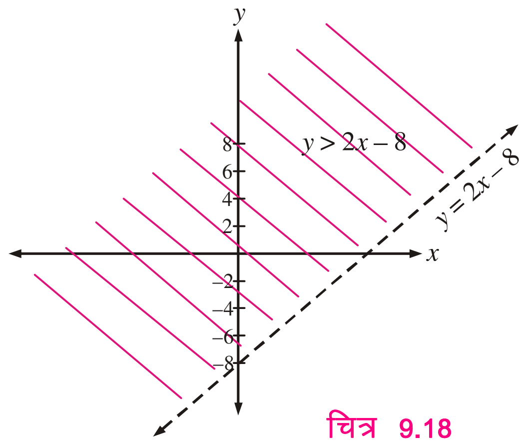


7.



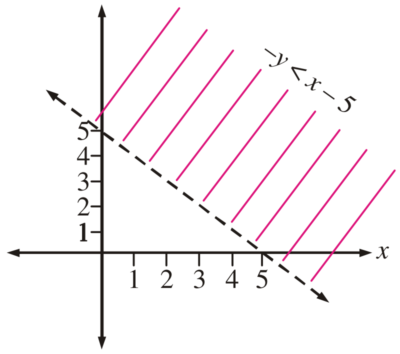
चित्र 9.17

8.



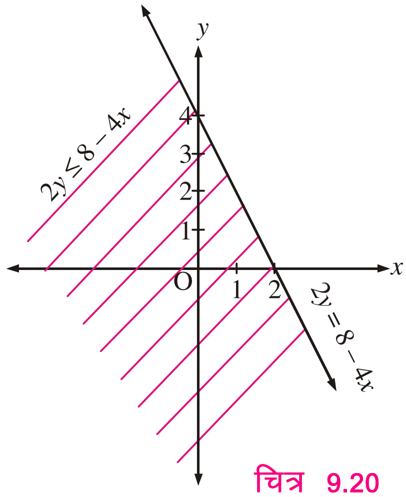
चित्र 9.18

9.



चित्र 9.19

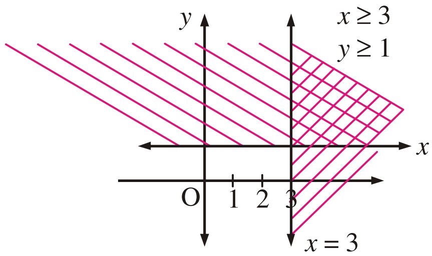
10.



चित्र 9.20

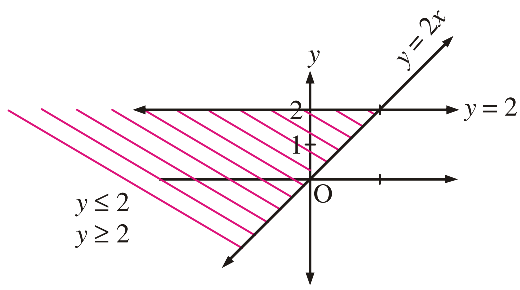
देखें आपने कितना सीखा 9.6

1.



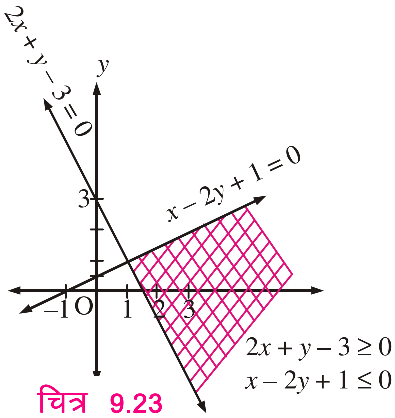
चित्र 9.21

2.



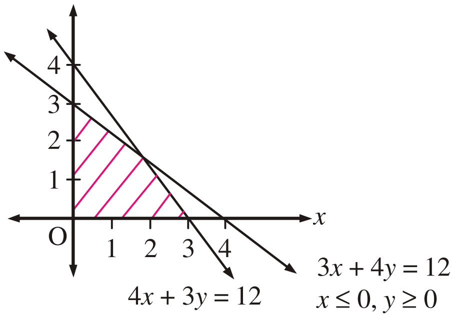
चित्र 9.22

3.



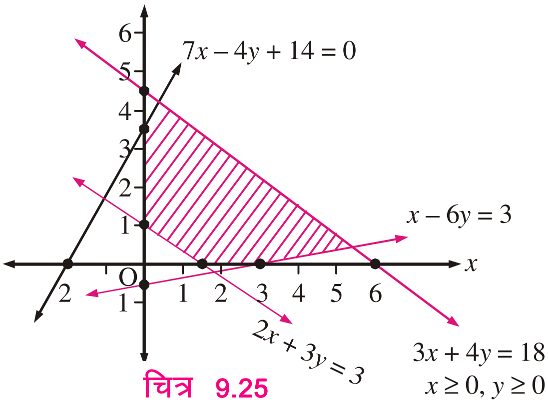
चित्र 9.23

4.



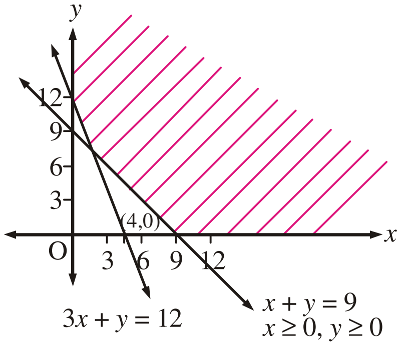
चित्र 9.24

5.



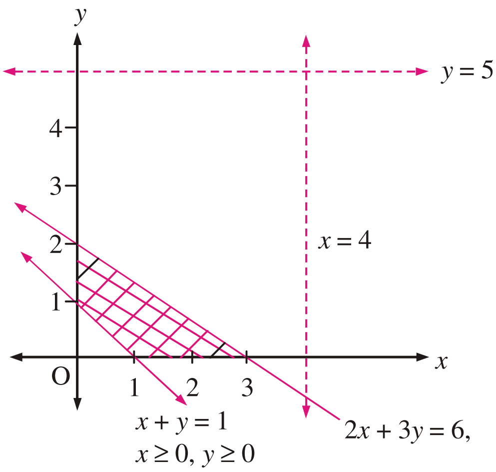
चित्र 9.25

6.



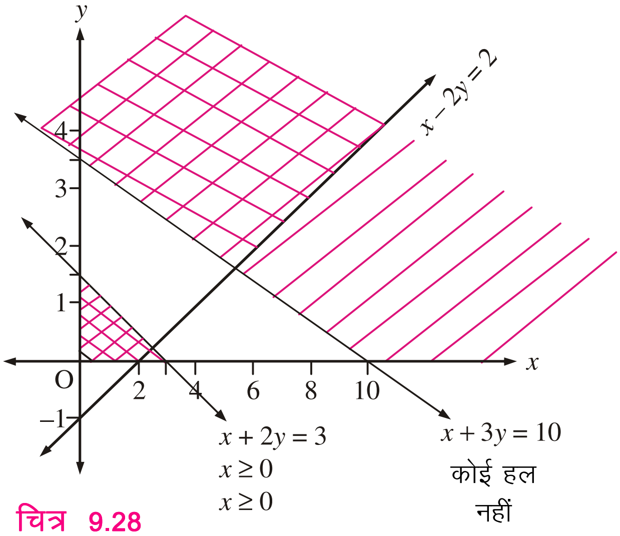
चित्र 9.26

7 .



चित्र 9.27

8.

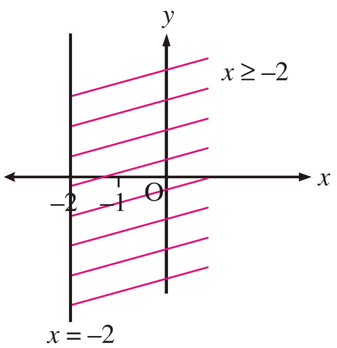


चित्र 9.28

आइए अभ्यास करें

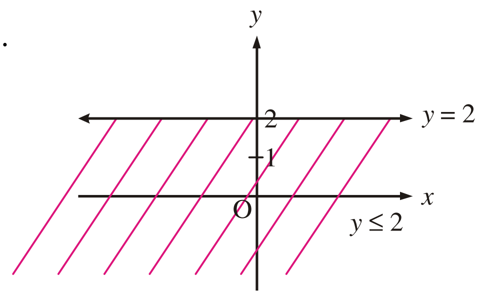
3. (i) $5x^2 - 8x + 5 = 0$ (ii) $10x^2 - 42x + 49 = 0$ (iii) $25x^2 - 116x + 64 = 0$

4.



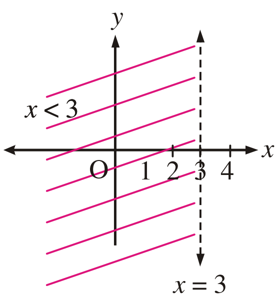
चित्र 9.29

5.



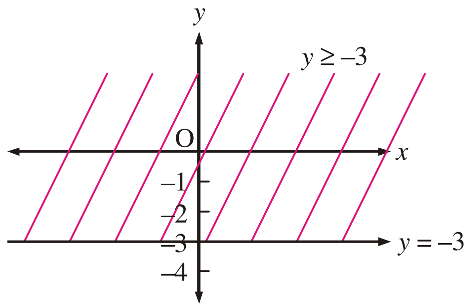
चित्र 9.30

6.



चित्र 9.31

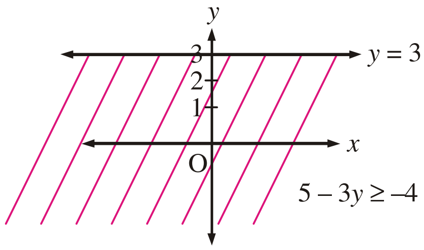
7.



चित्र 9.32

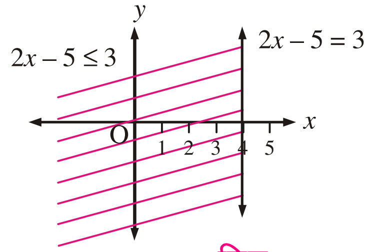
टिप्पणी

8.



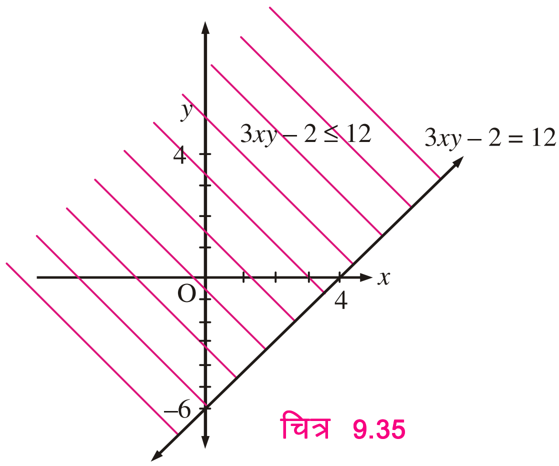
चित्र 9.33

9.



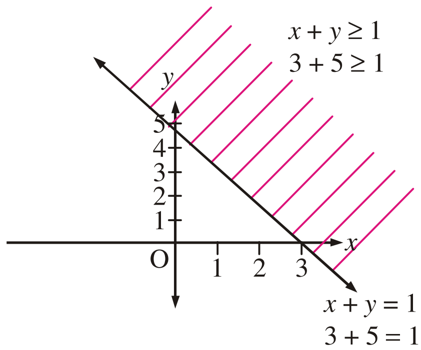
चित्र 9.34

10.



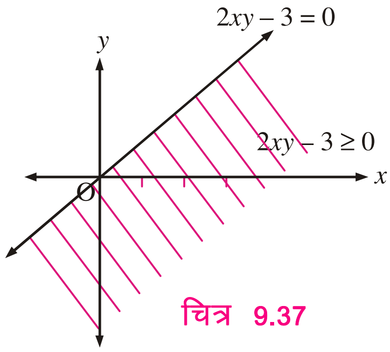
चित्र 9.35

11.



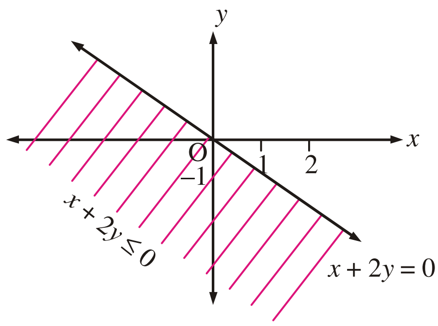
चित्र 9.36

12.



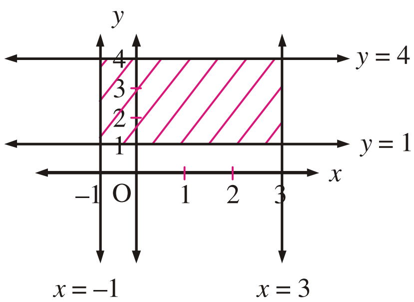
चित्र 9.37

13.



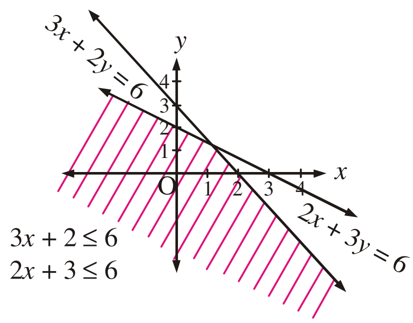
चित्र 9.38

14.



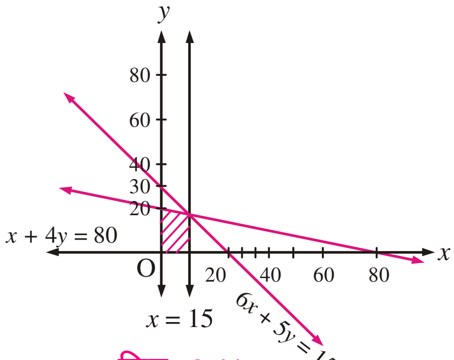
चित्र 9.39

15.



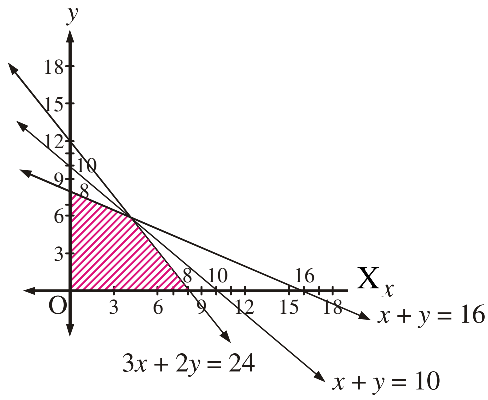
चित्र 9.40

16.



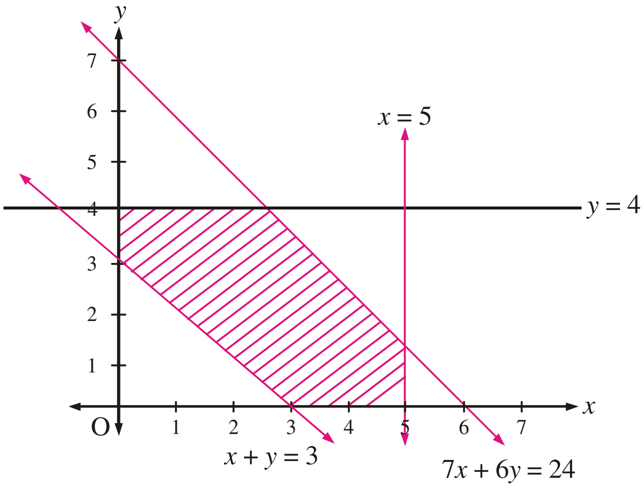
चित्र 9.41

17.



चित्र 9.42

18.



चित्र 9.43

19. $(-\infty, 2)$

20. $(-\infty, 2)$

21. $(-\infty, 2)$

22. $(-5, 5)$

23. $(5, \infty)$

24. $(-7, 11)$

25. 320 लीटर से अधिक तथा 1280 लीटर से कम

26. 562.5 लीटर से अधिक तथा 900 लीटर से कम