312hi05

5

गुरुत्वाकर्षण

क्या आपने कभी सोचा है कि ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद वापस पृथ्वी पर क्यों लौट आती है? या हवा में उछाला गया एक सिक्का वापस जमीन पर क्यों गिर जाता है? आदि काल से ही ये घटनाएँ मानव के लिए आश्चर्य का कारण बनी रही हैं। इस प्रश्न का उत्तर 17वीं शताब्दी में सर आइजेक न्यूटन ने दिया। उन्होंने बतलाया कि चीजों के पृथ्वी की ओर आकर्षित होने का कारण पृथ्वी का ***गुरुत्वाकर्षण बल*** है। उन्होंने यह भी बताया कि इसी बल के कारण पृथ्वी तथा अन्य ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं और इसी बल के कारण चन्द्रमा अपनी कक्षा में गति करता है। यह एक सार्वत्रिक बल है अर्थात् यह ब्रह्माण्ड में सभी जगह उपस्थित है। वास्तव में इसी बल के कारण ब्रह्माण्ड एक साथ आबद्ध है।

इस पाठ में आप न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमों के बारे में सीखेंगे। हम पृथ्वी के आकर्षण के कारण उत्पन्न त्वरण का भी अध्ययन करेंगे। यह त्वरण, जिसे ***गुरुत्वजनित त्वरण*** कहते हैं पृथ्वी के सभी स्थानों पर समान नहीं रहता है। हम उन कारकों का पता करेंगे जिनके कारण त्वरण का मान परिवर्तित होता है। हम गुरूत्वीय विभव तथा स्थितिज ऊर्जा के संबंध में अध्ययन करेंगे तथा ग्रहीय गति के लिए केपलर के नियमों एवं विभिन्न प्रकार के कृत्रिम उपग्रहों की कक्षाओं के बारे में भी सीखेंगे। अंत में अंतरिक्ष खोज के क्षेत्र में भारत के महत्वपूर्ण कार्यक्रमों एवं उपलब्धियों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

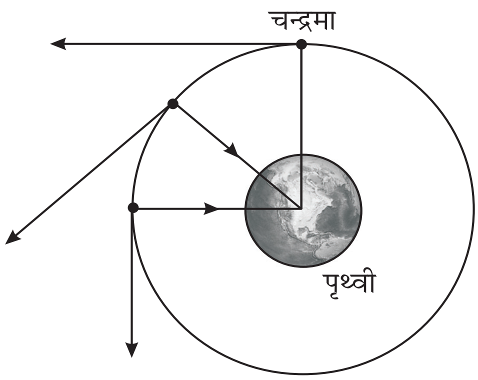
इस पाठ को पढ़ने के पश्चात आप

- *गुरुत्वाकर्षण का नियम बता पाएंगे;*
- *किसी आकाशीय पिण्ड के गुरुत्वीय त्वरण के मान की गणना कर सकेंगे;*
- *ऊँचाई, गहराई व अक्षांशों में परिवर्तन के साथ गुरुत्वीय त्वरण में होने वाले परिवर्तन का विश्लेषण कर सकेंगे;*
- *गुरुत्वीय विभव तथा गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में विभेद कर पाएंगे;*
- *ग्रहों की गति के लिए उत्तरदायी बल को पहचान सकेंगे और केपलर के ग्रह गति विषयक नियमों का प्रतिपादन कर सकेंगे;*

- *कक्षीय वेग एवं पलायन वेग की गणना कर सकेंगे;*
- *यह बतला सकेंगे कि कृत्रिम उपग्रह का प्रक्षेपण कैसे किया जाता है;*
- *ध्रुवीय एवं विषुवतीय उपग्रहों में भेद कर सकेंगे;*
- *किसी उपग्रह के तुल्यकाली उपग्रह बनने की शर्तें बता सकेंगे;*
- *एक तुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई की गणना कर सकेंगे और उनके अनुप्रयोगों की सूची तैयार कर सकेंगे; तथा*
- *अंतरिक्ष तकनीकी के क्षेत्र में भारत की उपलब्धियाँ बता पाएंगे।*

5.1 गुरुत्वाकर्षण का नियम

यह कहा जाता है कि न्यूटन एक पेड़ के नीचे बैठे थे जब एक सेब आकर जमीन पर गिरा। इससे उनकी विचार श्रृंखला प्रारंभ हुई। चूँकि सेब तथा दूसरे पदार्थ पृथ्वी गिरते हैं इसलिये पृथ्वी का कोई बल उन पर अवश्य कार्य करता होगा। उन्होंने स्वंय से प्रश्न किया क्या यह वही बल तो नहीं है जो चन्द्रमा को पृथ्वी के चारों ओर उसकी कक्षा में बनाए रखता है। न्यूटन ने तर्क दिया कि चंद्रमा अपनी कक्षा के किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा की दिशा में छिटककर दूर चला जाता यदि इसे इसकी कक्षा में बनाये रखने के लिए इस पर कोई बल कार्य न करता (चित्र 5.1)



चित्र. 5.1 : अपनी कक्षा के किसी भी बिंदु पर चन्द्रमा छिटककर स्पर्श रेखा की दिशा में दूर चला जाता, लेकिन पृथ्वी का आकर्षण बल इसे इसकी कक्षा में बनाए रखता है।

क्या यह निरन्तर केन्द्र की तरफ गिरने की प्रवृत्ति कहीं उसी बल के कारण तो नहीं है जिसके कारण सेब जमीन पर आ गिरता है। उन्होंने केपलर के नियमों से यह निगमन किया था कि सूर्य व ग्रहों के बीच का बल $1/r^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है जहाँ r उनके बीच की दूरी है। इस परिणाम का प्रयोग करते हुए वह यह सिद्ध करने में सफल हुए कि यही बल चन्द्रमा को पृथ्वी से बाँधे रखता है। तब उन्होंने सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण के नियम का व्यापकीकरण इस प्रकार किया।

ब्रह्माण्ड में प्रत्येक कण अन्य सभी कणों को अपनी ओर एक बल से आकर्षित करता है जो उन दो कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती और उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। इस प्रकार यदि m_1 और m_2 दो वस्तुओं के द्रव्यमान हों और r उनके बीच की दूरी हो तो बल का परिमाण

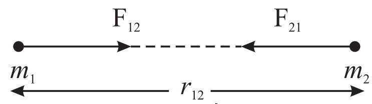
$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

या
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{5.1}$$

आनुपातिकता स्थिरांक G को **सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक कहते हैं। किन्हीं दो वस्तुओं के लिए इसका मान ब्रह्माण्ड में कहीं भी समान रहता है।** इसका तात्पर्य यह हुआ कि यदि पृथ्वी पर, नियत दूरी पर रखे दो कणों के बीच लगने वाला बल F है तो ब्रह्माण्ड में अन्यत्र कहीं भी इन दो कणों को यदि समान दूरी पर रखा जाए तो इनके बीच लगने वाला बल F ही होगा।

गुरुत्वीय बल का एक अभिलक्षण यह है कि यह सदैव आकर्षण बल होता है। यह प्रकृति के मूलभूत बलों में से एक है।

याद रहे कि यह आकर्षण पारस्परिक होता है अर्थात् m_1 द्रव्यमान का कण m_2 कण को आकर्षित करता है और m_2 द्रव्यमान का कण m_1 द्रव्यमान के कण को आकर्षित करता है। यह बल दोनों कणों की स्थिति को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है।



चित्र. 5.2 : द्रव्यमान m_1 और m_2 एक दूसरे से r_{12} दूरी पर रखे गए हैं। द्रव्यमान m_1 द्रव्यमान m_2 को F_{12} बल से आकर्षित करता है।

हम जानते हैं कि बल एक सदिश राशि है। क्या इस स्थिति में समीकरण (5.1) में संशोधन की आवश्यकता है? इस प्रश्न का उत्तर है कि इस समीकरण द्वारा परिमाण एवं दिशा दोनों का बोध होना चाहिए। जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि गुरुत्वाकर्षण बल दो कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है। अर्थात् m_1 द्रव्यमान m_2 द्रव्यमान को एक बल से आकर्षित करता है जो कि उन्हें जोड़ने वाली रेखा की दिशा में लगता है (चित्र 5.2)। यदि m_1 द्वारा m_2 पर लगाए गए बल को $\mathbf{F}_{12}$ द्वारा दर्शाएं और उनके बीच की दूरी को $\mathbf{r}_{12}$ से व्यक्त किया जाए तो गुरुत्वाकर्षण के नियम का सदिश रुप होगा

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{\mathbf{r}_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{5.2}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{r}}_{12}$, m_1 से m_2 की ओर इंगित करता एक इकाई–सदिश है।
इसी प्रकार m_2 द्वारा m_1 पर लगाये बल को लिख सकते हैं।

$$\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{\mathbf{r}_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{5.3}$$

चूँकि $\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\hat{\mathbf{r}}_{21}$, समीकरण (5.2) और (5.3) से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{5.4}$$

बल $\mathbf{F}_{12}$ और $\mathbf{F}_{21}$ परिमाण में बराबर और दिशा में विपरीत हैं और न्यूटन के तृतीय गति नियम के अनुसार क्रिया व प्रतिक्रिया बलों का एक युग्म बनाते हैं। स्मरण रहे $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ और $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ दोनों इकाई परिमाण सदिश हैं। तथापि इन दो सदिशों की दिशाएं विपरीत हैं।

जब तक अन्यथा न कहा जाये इस पाठ में हम केवल गुरुत्वाकर्षण बल के परिमाण का उपयोग करेंगे।

G का मान इतना कम है कि न्यूटन या उनके समकालीन प्रयोगकर्ता इसका मान नहीं निकाल पाए। इसका मान लगभग 100 साल बाद कैवेंडिस ने ज्ञात किया। G का सभी के द्वारा स्वीकार किया गया मान $6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ है। G का मान इतना कम होने के कारण ही दो साधारण वस्तुओं के बीच इस बल को महसूस नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 5.1 : केपलर का तीसरा नियम बतलाता है (इसकी विस्तृत व्याख्या हम बाद में करेंगे) कि यदि सूर्य व ग्रह के बीच की दूरी r है और T इसका परिक्रमण काल है तो $r^3 / T^2 =$ स्थिरांक होता है। इसके आधार पर दर्शाइए कि ग्रह पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल सूर्य से उसकी दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है।

हल : सरलता के लिये ग्रह की कक्षा को वृत्ताकार मान लेते हैं। (वास्तविकता में कक्षा लगभग वृत्ताकार होती हैं)। तब ग्रह पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

जहाँ υ कक्षीय वेग है, चूँकि $\upsilon = r\omega = \frac{2\pi r}{\text{T}}$, T = परिक्रमण काल

अत:
$$F = m\left(\frac{2\pi r}{\text{T}}\right)^2 \Big/ r$$

या
$$F = \frac{4\pi^2 mr}{\text{T}^2}$$

लेकिन केपलर के तीसरे नियम के अनुसार $\text{T}^2 \propto r^3$ or $\text{T}^2 = Kr^3$ (केपलर का तीसरा नियम) जहाँ K आनुपातिकता स्थिरांक है।

$\therefore$
$$F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{K} \times \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot \frac{1}{r^2}$$

या
$$F \propto \frac{1}{r^2} \qquad (\because \text{ एक ग्रह के लिये } \frac{4\pi^2 m}{K} \text{ नियत है})$$

आगे बढ़ने से पूर्व अच्छा हो कि आप अपनी प्रगति की जाँच कर लें।

पाठगत प्रश्न 5.1

1. चन्द्रमा पृथ्वी का एक पूरा चक्कर 27.3 दिनों में लगा लेता है। याद रखें कि यह समय स्थिर तारों के संदर्भ में है (पृथ्वी के संदर्भ में परिक्रमण काल 29.5 दिन है; इसे कुछ कलैण्डरों में एक मास की अवधि निर्धारित करने में प्रयोग किया जाता है।) चन्द्रमा की कक्षा की त्रिज्या 3.84×10^8 m (पृथ्वी की त्रिज्या का 60 गुना) है। चन्द्रमा का अभिकेन्द्र-त्वरण

ज्ञात कीजिए और दर्शाइए इसका मान 9.8 m s^{-2}/3600 है, गुरुत्व का दूरी के साथ परिवर्तन दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है– अर्थात् $1/r^2$ के अनुसार बदलता है।

2. समीकरण (5.1) की सहायता से G की विमाएं ज्ञात कीजिए।

3. समीकरण (5.1) की सहायता से दर्शाइये कि G को एक–एक kg द्रव्यमान के दो पिण्डों के बीच लगने वाले बल के रुप में परिभाषित किया जा सकता है, जबकि उनके बीच की दूरी 1 m हो।

4. एक निश्चित दूरी पर रखी हुई दो वस्तुओं के बीच लगने वाले बल का परिमाण F है। F के मान में क्या परिवर्तन होगा यदि (i) द्रव्यमानों का मान बदले बिना उनके बीच की दूरी को दो गुना कर दिया जाए (ii) यदि दूरी समान रहती है और प्रत्येक द्रव्यमान का परिमाण दो गुना कर दिया जाए (iii) यदि दूरी और प्रत्येक द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए।

5. 50 kg और 60 kg की दो वस्तुएं एक दूसरे से 1 m की दूरी पर रखी हैं। उनके बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें।

5.2 गुरुत्वीय त्वरण

न्यूटन के गति के दूसरे नियम से आप जानते हैं कि किसी वस्तु पर लगाए गए **F** परिमाण के बल और उससे उत्पन्न त्वरण के बीच संबंध निम्नवत् है:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (5.5)$$

गुरुत्व बल अर्थात् पृथ्वी के समीप रखी वस्तु पर लगने वाला पृथ्वी द्वारा आरोपित बल वस्तु में एक त्वरण उत्पन्न करता है। गुरुत्व बल के कारण जनित इस त्वरण को ***गुरुत्वीय त्वरण*** कहते हैं। इसे प्रतीक g से दर्शाया जाता है। समीकरण (5.1) के अनुसार पृथ्वी की सतह पर *m* द्रव्यमान की वस्तु पर लगने वाला बल

$$F = G\frac{mM}{R^2} \text{ होता है।} \qquad (5.6)$$

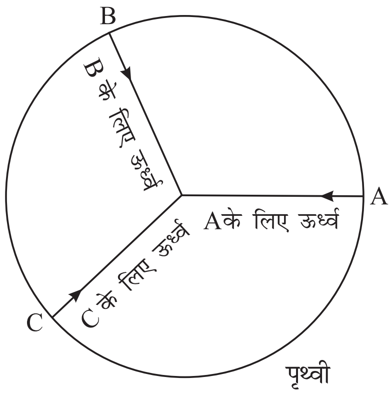
जहां *M* पृथ्वी का द्रव्यमान और *R* इसकी त्रिज्या है)। समीकरण (5.5) और (5.6) से हम पाते हैं कि

$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$

या

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (5.7)$$

याद रखें कि वस्तु पर लगे गुरुत्वीय बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। इसी दिशा को हम ऊर्ध्व दिशा कहते हैं। चित्र 5.3 में विभिन्न स्थानों के लिए ऊर्ध्वाधर दिशा दर्शायी गयी है। ऊर्ध्व दिशा के लम्बवत दिशा को हम क्षैतिज दिशा कहते हैं।

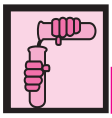


चित्र. 5.3 : किसी स्थान पर ऊर्ध्व दिशा उस स्थान पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है।

यदि हमें पृथ्वी या किसी अन्य आकाशीय पिंड जैसे ग्रह का द्रव्यमान और त्रिज्या ज्ञात हो तो इसकी सतह पर g का मान समीकरण (5.7) की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। पृथ्वी की सतह पर g का मान प्राय: 9.8 m s^{-2} लिया जाता है। अत: गुरुत्वजनित त्वरण का औसत मान 9.8 m s^{-2} है।

इसी प्रकार किसी ग्रह या उपग्रह के लिये भी g का मान ज्ञात किया जा सकता है, यदि हमें उस ग्रह या उपग्रह का द्रव्यमान तथा त्रिज्या ज्ञात हो।

आगे बढ़ने से पहले आइये समीकरण (5.7) पर विचार करें। हम पाते हैं कि किसी पिंड पर प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण इसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि भारी और हल्की गेंदें समान वेग से नीचे गिरती हैं। यदि हम किसी निश्चित ऊँचाई से इन गेंदों को एक साथ नीचे गिराएं तो धरातल पर ये दोनों गेंदे एक ही समय पर पहुँचेंगी।



क्रियाकलाप 5.1

एक कागज का टुकड़ा और एक छोटा सा कंकड़ लें। इन्हें किसी नियत ऊँचाई से एक साथ नीचे गिरने दें। दोनों के पथों का अवलोकन करें और उनके जमीन को छूने के समय पर ध्यान दें। पुन: दो कंकड़ लें जिनमें एक दूसरे से भारी हो, उन्हें भी एक नियत ऊँचाई से नीचे गिरने दें और उनके जमीन छूने के समय का अवलोकन करें।

गुरुत्व के अन्तर्गत पतन

यह तथ्य कि भारी और हल्के कंकड़ एक समान दर से नीचे गिरते हैं, कुछ विचित्र सा प्रतीत हो सकता है। 16 वीं शताब्दी तक यह एक आम विश्वास था कि एक भारी वस्तु एक हल्की वस्तु की अपेक्षा अधिक तेजी से नीचे गिरती है। तथापि, उस समय के महान वैज्ञानिक गैलीलियो ने यह दर्शाया कि दोनों वस्तुएं वास्तव में एक ही दर से नीचे गिरती हैं। यह कहा जाता है कि वे पीसा की मीनार के ऊपर गए और और दो गेंदों को, जिनके भार में बहुत अधिक अन्तर था, एक साथ नीचे गिराया। गेंदे धरातल पर एक ही समय पर पहुँची। लेकिन जब एक पंख और एक पत्थर को साथ-साथ गिराया गया तो वे अलग-अलग समय पर धरातल पर पहुँचते हैं। गैलीलियों ने तर्क दिया कि पंख अपेक्षाकृत धीमी गति से गिरता है क्योंकि इस पर हवा का उत्प्लावन बल एवं प्रतिरोध

क बल कार्य करता है। उसने कहा कि निर्वात में दोनों वस्तुएं एक ही समय पर गिरेगीं। हाल के वर्षो में अंतरिक्ष यात्रियों ने चन्द्रमा पर पंख और कंकड़ का प्रयोग करके यह सिद्ध किया कि दोनों एक साथ जमीन पर पहुँचते हैं। स्मरण रखें कि चन्द्रमा पर वायुमण्डल नहीं है।

गुरुत्व के प्रभाव के कारण वस्तुएँ ऊर्ध्वाधरत: नीचे पृथ्वी की ओर गिरती हैं। छोटी ऊँचाईयों के लिए, गुरुत्वजनित त्वरण अधिक नहीं बदलता है। इसलिए t समय में तय की गयी दूरी प्रारंभिक तथा अंतिम वेगों के लिये समीकरण निम्नवत् लिख सकते हैं:

$$v = u + gt$$

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

और

$$v^2 = u^2 + 2gs. \qquad (5.8)$$

यहाँ यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि **g हमेशा ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर कार्य करता है चाहे वस्तु किसी भी दिशा में गति कर रही हो। किसी वस्तु का g त्वरण से गिरना मुक्त-पतन (free fall) कहा जाता है।**

समीकरण 5.8 की सहायता से यह स्पष्ट है कि यदि एक वस्तु विराम अवस्था से गिरती है तो t समय में h दूरी तक गिरेगी जहाँ $h = (1/2)gt^2$ है। अत: किसी ऊँचाई h से किसी भारी सिक्के को मुक्त रुप से गिराकर और सही समय दर्शाने वाली विराम घड़ी द्वारा इसके जमीन पर पहुँचने का समय लेकर g का मान ज्ञात किया जा सकता है। यदि आप 5 रुपये के एक सिक्के को 1मीटर की ऊँचाई से मुक्त रुप से गिराकर जमीन पर पहुँचने के समय का औसत मान लें तो यह 0.45 सेकन्ड आता है। इसकी सहायता से g के मान की गणना की जा सकती है। तथापि, प्रयोगशाला में आप सरल लोलक का उपयोग करके परोक्ष विधि से g का मान ज्ञात करेंगे।

आप आश्चर्य कर रहे होंगे कि किसी कण पर गुरुत्व बल की गणना करते समय हम पृथ्वी की सतह पर रखी वस्तु और पृथ्वी के बीच की दूरी को पृथ्वी की त्रिज्या के बराबर क्यों लेते हैं। जब हम दो बिंदु द्रव्यमानों को लेते हैं तो उनके बीच की दूरी उनके पृथकन के बराबर ली जाती है। लेकिन जब हम दो बड़ी वस्तुओं के बीच गुरुत्व बल की गणना करते हैं तो उनके बीच की दूरी क्या लेते हैं? इस समस्या के समाधान के लिए वस्तु के गुरुत्व-केन्द्र की संकल्पना का समावेश किया गया है। जहाँ तक गुरुत्व प्रभाव का प्रश्न है हम पूरे पिण्ड की जगह एक तुल्य बिंदु पर पिण्ड के भार को केन्द्रित मान सकते हैं। अर्थात् इस बिंदु पर गुरुत्व बल लग रहा है ऐसा मान सकते हैं? ज्यामितीय रुप से नियमित वस्तुएँ जिनका घनत्व समान हो जैसे गोले, बेलन, आयत आदि के लिये इनका ज्यामितीय केन्द्र ही इनका गुरुत्व केन्द्र भी होता है। यही कारण है कि हम अन्य वस्तुओं की दूरी पृथ्वी के केन्द्र से मापते हैं। अनियमित आकृति की वस्तुओं के लिए गुरुत्व केन्द्र निर्धारित करने का कोई सरल तरीका नहीं है।

एक धातु की अंगूठी का गुरुत्व-केन्द्र कहाँ पर स्थित होता है? यह वास्तव में अंगूठी के केन्द्र पर स्थित होता है।

ध्यान दें कि यह बिंदु वस्तु के द्रव्य के बाहर स्थित है। अतः याद रखें कि किसी वस्तु का गुरुत्वकेन्द्र उसके पदार्थ के बाहर हो सकता है। आपका अपना गुरुत्व केन्द्र कहाँ पर है? यदि हम अपना आकार नियमित मान लें तो, हमारा गुरुत्वीय केन्द्र नाभि से थोड़ा नीचे होगा।

इस पाठ में आगे आप वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र के बारे में भी ज्ञान प्राप्त करेंगे। यह एक ऐसा बिंदु है जिसपर वस्तु का पूरा द्रव्यमान केन्द्रित माना जा सकता है। **एकसमान गुरुत्वीय क्षेत्र में** (जैसा कि पृथ्वी के समीप होता है) गुरुत्व केन्द्र और द्रव्यमान केन्द्र संपाती होते हैं।

गुरुत्व केन्द्र या द्रव्यमान केन्द्र के प्रयोग से हमारी गणनाएँ अत्यधिक सरल हो जाती हैं। कल्पना करें कि हमें यदि किसी वस्तु का निर्माण करने वाले कणों के बीच कार्यकारी बलों और इनका परिणामी बल ज्ञात करना हो, तो यह कितना कठिन कार्य होगा।

आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि G और g अलग-अलग भौतिक राशियाँ हैं। G गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियतांक है और यह अचर है जबकि g गुरुत्वजनित त्वरण है जो कि एक जगह से दूसरे जगह बदल सकता है। इसे हम अगले भाग में देखेंगे।

अब आप अपनी प्रगति की जाँच करने के लिए निम्न प्रश्नों के उत्तर दें:

पाठगत प्रश्न 5.2

1. पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} किलोग्राम है और इसकी माध्य त्रिज्या 6.371×10^{6} m. है। पृथ्वी की सतह पर g का मान ज्ञात करें।
2. बहुत सावधानीपूर्वक लिए गए माप दर्शाते हैं कि विषुवत-वृत (भूमध्यरेखा) पर पृथ्वी की त्रिज्या 6378 किलोमीटर है जबकि ध्रुवों पर 6357 किलोमीटर है। ध्रुवों व विषुवत रेखापर g के मानों की तुलना कीजिए।
3. किसी वस्तु को ऊपर फेंके जाने पर g की दिशा क्या होगी जब (i) वस्तु ऊपर जा रही है। और (ii) जब यह अधिकतम ऊँचाई पर है (iii) जब यह नीचे आ रही है। (iv) जब यह धरातल पर वापस आ जाती है?
4. चन्द्रमा का द्रव्यमान 7.3×10^{22} kg है और इसकी त्रिज्या 1.74×10^{6} m है। इसकी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात कीजिए।

5.3 g के मान में परिवर्तन

5.3.1 ऊँचाई के साथ परिवर्तन

समीकरण 5.7 ($g = G\dfrac{M}{R^2}$) के दाईं ओर हर में राशि R^2 दर्शाती है कि g का परिमाण पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के मान के अनुसार दूरी R के बढ़ने पर घटता है। अतः सतह से R दूरी पर अर्थात् केन्द्र से $2R$ दूरी पर इसका मान पृथ्वी की सतह पर मान का (1/4) हो जाता

है। यदि पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h जिसे तुंगता (altitude) कहते हैं, पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में काफी कम हो तो, g_h (h तुंगता पर गुरुत्वजनित त्वरण का मान)

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \qquad (5.9)$$

चूँकि $g = GM/R^2$ पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान है।

अतः
$$\frac{g}{g_h} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2$$

अब चूँकि (h/R) एक छोटी राशि है तो $(h/\mathrm{R})^2$ उससे भी छोटी राशि होगी। अतः इसे (h/R) की तुलना में नगण्य माना जा सकता है। अतः

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{2h}{R}\right)} \qquad (5.10)$$

आइए इसे एक उदाहरण की सहायता से समझें।

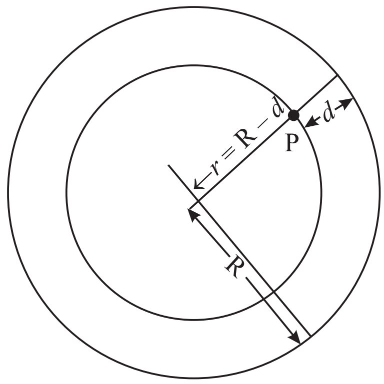
उदाहरण 5.2 : आधुनिक वायुयान 10 km से अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं। हम इस ऊँचाई पर g का मान निकालते हैं। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km और पृथ्वी की सतह पर g का मान 9.8 m s^{-2} है।

हल : समीकरण (5.10) से

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{2.(10)\ \text{km}}{6400\ \text{km}}\right)} = \frac{9.8\ \text{m s}^{-2}}{1.003} = 9.77\ \text{m s}^{-2}.$$

5.3.2. गहराई के साथ g में परिवर्तन

पृथ्वी के अंदर व गहराई d पर स्थित एक बिंदु P की कल्पना कीजिए (चित्र. 5.4)। पृथ्वी को समान घनत्व ρ का एक गोला मान लें। बिंदु P की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $r = (\mathrm{R} - d)$ है। $(\mathrm{R} - d)$ त्रिज्या का एक गोला खींचे। P बिंदु पर रखे द्रव्यमान पर d मोटाई के कोश से लगने वाला गुरुत्वीय बल निरस्त हो जाता है। यह केवल r त्रिज्या के गोले के कारण बल महसूस करता है। अतः बिन्दु P पर गुरुत्वीय बल केवल r त्रिज्या के गोले के कारण होगा।



चित्र. 5.4 : d गहराई पर स्थित बिंदु की केन्द्र से दूरी $r = R - d$ है।

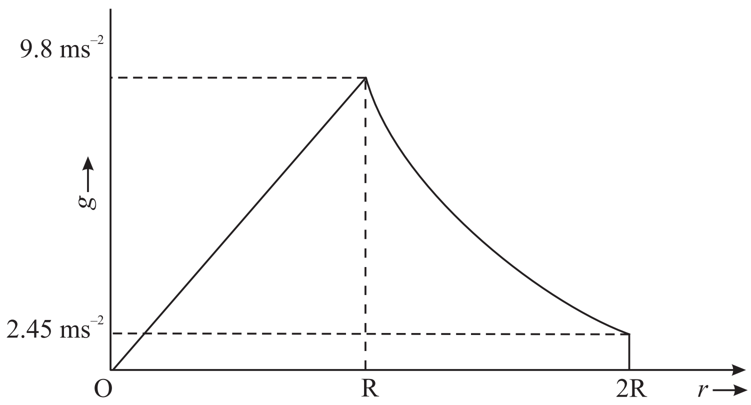
अतः P बिंदु पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करने के लिए हम $(R-d)$ त्रिज्या के गोले के द्रव्यमान का ही प्रयोग करेंगे। यदि ρ गोले का घनत्व हो तो इस गोले के द्रव्यमान

$$M' = \frac{4\pi}{3}\rho(R-d)^3 \qquad (5.10)$$

बिंदु P पर रखे कण द्वारा अनुभव किए गए गुरुत्वीय त्वरण का मान

$$g_d = G\frac{M'}{(R-d)^2} = \frac{4\pi G}{3}\rho(R-d) \qquad (5.11)$$

ध्यान दें कि जब d का मान बढ़ता है तो $(R-d)$ घटता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब हम पृथ्वी की सतह के नीचे जाते हैं तो g का मान घटता हैं। $d = R$ पर अर्थात्, पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य हो जाता है। यह भी नोट कीजिए कि $R-d=r$, पृथ्वी के केन्द्र से वस्तु की दूरी बतलाता है। अतः गुरुत्वीय त्वरण r के रैखिकतः समानुपातिक है। पृथ्वी के केन्द्र से g के मान में पृथ्वी की सतह से दूरी के साथ, परिवर्तन चित्र 5.5 में दर्शाया गया है।



चित्र. 5.5 : g के मान में पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के साथ परिवर्तन

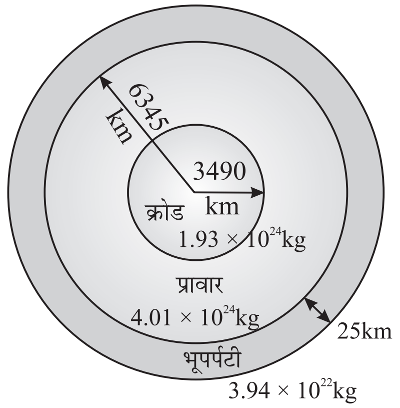
$d=0$ के लिए $g = \frac{4\pi G}{3}\rho R$. (समीकरण 5.11) से

अब (5.11) की सहायता से यह आसानी से देखा जा सकता है कि

$$g_d = g\frac{(R-d)}{R} = g\left(1-\frac{d}{R}\right),\ 0 \le d \le R \qquad (5.12)$$

अतः समीकरण (5.9) और (5.12) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **g का मान ऊँचाई और गहराई दोनों के साथ घटता है।**

पृथ्वी की आंतरिक संरचना



चित्र. 5.6 : पृथ्वी की संरचना (पैमाने पर नहीं) पृथ्वी की तीन प्रमुख परतों को उनके अनुमानित द्रव्यमानों के साथ दिखाया गया है।

वास्तव में g का मान एक निश्चित दूरी तक गहराई के साथ बढ़ता है फिर कम होने लगता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि हम पृथ्वी को एकसमान घनत्व का गोला मान लेते हैं जो कि सही नहीं है। पृथ्वी का अधिकतम भार क्रोड में केन्द्रित रहता है। ऊपरी सतहें काफी हल्की होती हैं (चित्र 5.6) बहुत थोड़ी गहराई के लिए, द्रव्यमान में कमी को नगण्य मान लिया जाता है जबकि r के मान में कमी होती है। इसलिए g का मान पहले कुछ गहराई तक बढ़ता है और फिर कम होने लगता है। इसका अर्थ है कि पृथ्वी को एक समान घनत्व का गोला मानने की अभिधारणा सही नहीं है।

5.3.3 g का अक्षांश के साथ परिवर्तन

आप जानते हैं कि पृथ्वी अपने अक्ष पर घूमती है। इसके कारण पृथ्वी की सतह पर प्रत्येक कण वर्तुल गति करता है। गुरुत्वीय बल की अनुपस्थिति में ये सभी कण अपने वृत्तीय पथ पर स्पर्शरेखाओं की दिशाओं में छिटककर दूर जा गिरते। गुरुत्वीय बल इन्हें पृथ्वी के तल के साथ जोड़े रखता है। आप यह भी जानते हैं कि किसी कण को वृत्तीय गति में बनाए रखने के लिए एक अभिकेन्द्र-बल की आवश्यकता होती है। फलत: पृथ्वी की सतह पर रखी वस्तुओं पर लगने वाले पृथ्वी के आकर्षण बल का मान थोड़ा-थोड़ा कम हो जाता है। वस्तुओं को पृथ्वी से जोड़े रखने वाली शक्ति (गुरुत्वाकर्षण) में धीरे-धीरे कमी आने लगती है। पृथ्वी के घूर्णन का सर्वाधिक प्रभाव भूमध्यरेखा पर महसूस किया जाता है। ध्रुवों पर यह घटकर शून्य हो जाता है। अब हम बगैर व्युत्पन्न किए g के मान में अक्षांश के साथ परिवर्तन के सूत्र को उद्धृत करते है। यदि g_λ, λ अक्षांश पर g के मान को दर्शाता है और g ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण का मान हो तो

$$g_\lambda = g - R\omega^2 \cos\lambda, \qquad (5.13)$$

जहाँ पर ω पृथ्वी का कोणीय वेग तथा R इसकी त्रिज्या है। आप आसानी से समझ सकते हैं कि ध्रुवों के लिए $\lambda = 90°$ है। इसलिए ध्रुवों पर $g_\lambda = g$.

उदाहरण 5.3 : अब हम ध्रुवों पर g के मान की गणना करते हैं।

हल : ध्रुवों पर पृथ्वी की त्रिज्या = 6357km = 6.357×10^6 m

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5.97×10^{24} kg

समी. (5.7) का उपयोग करने पर ध्रुवों पर g का मान होगा

$$g_{\text{poles}} = [6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} / (6.357 \times 10^6)^2] \text{ m s}^{-2}$$
$$= 9.853 \text{ m s}^{-2}$$

उदाहरण 5.4 : अब हम $\lambda = 60^\circ$ पर g के मान की गणना करते हैं। जहाँ पृथ्वी की त्रिज्या 6371 km है।

हल : पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल, T = 24 घंटे = $(24 \times 60 \times 60)$ s

पृथ्वी के घूर्णन की आवृत्ति = 1/T

पृथ्वी की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \times 60 \times 60)$

$$= 7.27 \times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad R\omega^2 \cos\lambda = 6.371 \times 10^6 \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \times 0.5$$
$$= 0.017 \text{ m s}^{-2}$$

अब चूँकि $\quad g_0 = g - R\omega^2 \cos\lambda,$

g_λ (60° अक्षांश पर) $= 9.853 - 0.017 = 9.836 \text{ m s}^{-2}$

पाठगत प्रश्न 5.3

1. किस ऊँचाई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी की सतह के उसके मान का आधा होगा?
2. किस गहराई पर g का मान पृथ्वी की सतह पर इसके मान का 80% होगा?
3. दिल्ली का अक्षांश लगभग 30° उत्तर है। दिल्ली और ध्रुवों के बीच g के मान में अन्तर की गणना कीजिए।
4. एक उपग्रह पृथ्वी से 1000 km की ऊँचाई पर चक्कर लगा रहा है। इस पर कार्य करने वाले गुरुत्वीय त्वरण की गणना (i) सूत्र (5.9) और $g \propto 1/r^2$ का प्रयोग करते हुए करें जहाँ r पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की दूरी है। आप किस विधि को अधिक अच्छी समझते हैं और क्यों?

5.4 भार और द्रव्यमान

वह बल जिससे कोई वस्तु पृथ्वी की ओर खिंचती है, उसे उसका भार कहते हैं। यदि m वस्तु का द्रव्यमान हो तो भार होगा:

$$W = mg \tag{5.14}$$

चूँकि भार एक बल है, इसकी इकाई न्यूटन होती है। यदि आपका द्रव्यमान 50 kg हो तो आपका भार

$$50\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m s}^{-2} = 490\ \text{N}$$ होगा।

चूँकि g एक स्थान से दूसरे स्थान पर बदलता है, इसलिए एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाने पर भार भी बदलता है। ध्रुवों पर भार का मान अधिकतम और भूमध्य रेखा पर न्यूनतम होता है। क्यों? क्योंकि पृथ्वी की त्रिज्या का मान ध्रुवों पर न्यूनतम और भूमध्य रेखा पर अधिकतम होता है।

तथापि, किसी वस्तु का द्रव्यमान अचर रहता है। द्रव्यमान वस्तु का नैज गुणधर्म है। इसलिए, चाहे वस्तु कहीं भी रखी हो इसका मान अचर रहता है।

टिप्पणी: दैनिक जीवन में बहुधा द्रव्यमान और भार को एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग करते हैं। स्प्रिंग तुलाऐं जो कि भार नापती हैं, N(न्यूटन) की अपेक्षा kg में अंशांकित की जाती है।

5.4.1 गुरुत्वीय विभव एवं स्थितिज ऊर्जा

किसी संरक्षी बल के प्रभावाधीन पिंड की स्थितिज ऊर्जा को पिंड में निहित ऊर्जा के रुप में परिभाषित कर सकते हैं और यह किसी बाहरी एजेन्सी द्वारा एक मानक स्थिति से वर्तमान स्थिति तक पिंड को लाने में किए गए कार्य के द्वारा मापी जाती है।

यदि कोई बल F पिंड को संरक्षी बल के विरुद्ध बिना किसी चाल परिवर्तन के एक सूक्ष्म दूरी dr तक विस्थापित करे तो इसकी स्थितिज ऊर्जा में होने वाला सूक्ष्म परिवर्तन

$$dU = -F.dr$$

r दूरी पर रखे दो द्रव्यमानों M एवं m के बीच गुरुत्वाकर्षण बल:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

∴ गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$dU = \frac{GMm}{r^2}dr$$

अथवा
$$U = GMm\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{GMm}{r}$$

यह दर्शाता है कि r दूरी पर रखे M एवं m द्रव्यमानों के दो कणों के बीच गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है:

$$U = -\frac{GMm}{r} + \text{ अचरांक}$$

जब r का मान अनन्त होने लगता है गुरुत्वीय ऊर्जा शून्य होने लगती है। अतः अचरांक शून्य हो जाता है और $U = \frac{-GMm}{r}$

गुरुत्वीय विभव (V): M द्रव्यमान के गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव उसके प्रति इकाई द्रव्यमान के लिए स्थितिज ऊर्जा के रुप में परिभाषित किया जाता है।

$\therefore$ गुरुत्वीय विभव, $V = \dfrac{U}{m} = -\dfrac{GM}{r}$

यह अदिश राशि है और इसका SI मात्रक J/kg है।

क्रियाकलाप 5.2

पृथ्वी के केन्द्र से 2R, 3R, 4R, 5R और 6R पर 50 kg द्रव्यमान की वस्तु का भार ज्ञात करें भार और दूरी के बीच एक ग्राफ खीचें। इसी ग्राफ में दूरी के साथ द्रव्यमान में परिवर्तन को भी दर्शाएँ।

द्रव्यमान एंव भार संबंधी अपने विचारों की पुष्टि के लिए निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें:

पाठगत प्रश्न 5.4

1. यदि आप चन्द्रमा के धरातल पर उतरते हैं तो आपका भार और द्रव्यमान किस प्रकार प्रभावित होगा?
2. पृथ्वी तथा मंगल पर अपने भार की तुलना कीजिए। आप चन्द्रमा से मंगल में जाते हैं। पृथ्वी की तुलना में आपका भार क्या होगा? आपके का द्रव्यमान पर क्या प्रभाव होगा? मंगल की त्रिज्या $= 4.3 \times 10^6$m और द्रव्यमान $= 6 \times 10^{23}$ kg लीजिए।
3. आपने भार मापने के लिए दो प्रकार की तुलाएं देखी होंगी। पलड़े वाली और स्प्रिंग वाली। पलड़े की तुला में एक ओर भार और दूसरी ओर मापी जाने वाली सामग्री रखी जाती है, जबकि स्प्रिंग तुला में सामग्री को एक हुक की सहायता से लटकाकर एक पैमाने पर इसका मान लिया जाता है। मान लीजिए आप दोनों तुलाओं से आलू के एक बैग को तौलते हैं और उनका मान समान आता है। अब आप यदि चन्द्रमा पर इन्हें ले जाकर तोलें तो क्या इनकी मापों में कोई अंतर आएगा?
4. गुरुत्वीय त्वरण का SI मात्रक बातइए।

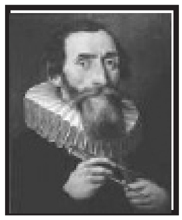
5.5 केपलर के ग्रहीय गति के नियम

प्राचीन समय में ऐसा माना जाता था कि सभी खगोलीय पिण्ड पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। ग्रीक खगोलशास्त्रियों ने इस बात का बड़ा समर्थन किया। पृथ्वी केंन्द्रित ब्रह्माण्ड के पक्ष में इतना प्रबल विश्वास था कि ग्रहों द्वारा सूर्य की परिक्रमा करने के सभी प्रमाणों की उपेक्षा कर दी गई। तथापि, पोलैंड के खगोलशास्त्री – कोपर निकस ने 15वीं शताब्दी में यह सुझाया कि सभी ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं। 16वीं शताब्दी में गैलीलियो ने अपने खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर कोपरनिकस के विचारों का समर्थन किया। दूसरे यूरोपीय खगोलशास्त्री टायको

ब्राहे ने ग्रहों की गति के बहुत से प्रेक्षण लिए। इन प्रेक्षणों के आधार पर, उनके सहायक केपलर ने ग्रहीय गति के नियमों को सूत्रबद्ध किया।

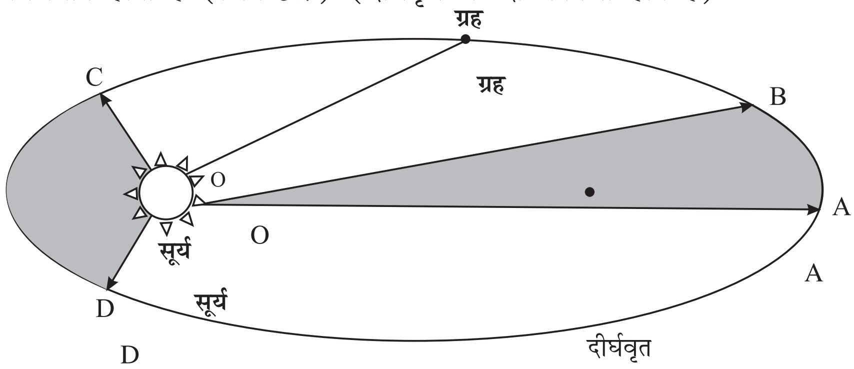
जोहन्स केपलर (1571-1630)

केपलर का जन्म जर्मनी में हुआ। इन्होंने अपनी जीवन वृत्ति खगोलशास्त्र में टायको ब्राहे के सहायक के रुप में प्रारम्भ की। टायको ब्राहे ने विभिन्न ग्रहों की स्थितियों के प्रेक्षण बड़ी लग्न से 20 वर्षों से अधिक अवधि तक नियमित रूप से लिए। उनकी मृत्यु के बाद ये प्रेक्षण केपलर के पास पहुँचे और उन्होंने इनका विश्लेषण करने में 16 वर्ष की अवधि लगाई। इस विश्लेषण के आधार पर केपलर ने ग्रहीय गति के तीन नियम प्राप्त किए जिनका वर्णन इस अध्याय में किया गया है। उन्हें ज्यामितीय-प्रकाशिकी का जन्मदाता माना जाता है क्योंकि ये किरण चित्रों की सहायता से एक दूरदर्शी की कार्य प्रणाली को समझने वाले पहले व्यक्ति थे।



केपलर ने ग्रहों की गति निर्धारित करने वाले तीन नियमों का संरुपण किया:

1. सूर्य के चारों ओर ग्रहों का गति-पथ दीर्घवृत्ताकार होता है और सूर्य इसके किसी एक फोकस पर विद्यमान होता है (चित्र 5.7) (दीर्घवृत्त के दो फोकस होते हैं)



चित्र 5.7: एक ग्रह का सूर्य के चारों ओर परिक्रमा का पथ दीर्घवृत्ताकार होता है, जिसके दो में से एक फोकस पर सूर्य की स्थिति होती है। यदि A से B तक जाने का समय व C से D तक जाने का समय समान हो तो, केपलर के दूसरे नियम के अनुसार क्षेत्रफल AOB और COD बराबर होते हैं?

2. सूर्य से ग्रह तक खींची गयी रेखा (त्रिज्या-सदिश) समान अवधि में समान क्षेत्रफल समाहित करती है (चित्र 5.7)।
3. किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर एक परिक्रमा पूरा करने में लगे समय का वर्ग (परिकमण काल का वर्ग), सूर्य से उस ग्रह की औसत दूरी के घन का अनुक्रमानुपाती होता है। यदि हम परिक्रमण काल को T से दर्शाएं तथा सूर्य से ग्रह की औसत दूरी को r से दर्शाएं, तो

$$T^2 \alpha r^3$$

आइये, हम तीसरे नियम को और अधिक बारीकी से समझने की चेष्टा करें। आपको याद होगा कि इस नियम की सहायता से न्यूटन यह निष्कर्ष निकालने में सक्षम हुए थे कि सूर्य और

ग्रहों के बीच लगने वाला बल $1/r^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है (उदाहरण 5.1)। पुनः यदि T_1 और T_2 दो ग्रहों के परिक्रमण-काल हों और r_1 और r_2 सूर्य से उनकी औसत दूरियाँ हों तो तीसरे नियम के अनुसार

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \tag{5.15}$$

आनुपातिकता-स्थिरांक एक ग्रह के संबंध को दूसरे ग्रह के संबंध से भाग देने पर निरस्त हो जाता है। यह एक बहुत महत्वपूर्ण नियम हैं। उदाहरण के तौर पर यदि T_1, r_1 और r_2 ज्ञात हों तो इस नियम की सहायता से T_2 का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 5.5 : बुध का परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए, यदि सूर्य से इसकी दूरी 57.9×10^9 m है। आपको दिया गया है कि पृथ्वी की सूर्य से दूरी 1.5×10^{11} m है।

हल : हम जानते हैं कि पृथ्वी का परिक्रमण काल = 365.25 दिन

$\therefore$ $T_1 = 365.25$ दिन, $r_1 = 1.5 \times 10^{11}$ मीटर, $r_2 = 57.9 \times 10^9$ मीटर (बुध के लिए)

तब बुध का परिक्रमण काल T_2 प्राप्त होगा

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 r_2^3}{r_1^3}} = \sqrt{\frac{(365.25)^2 \times (57.9 \times 10^9)^3 \text{m}^3}{(1.5 \times 10^{11})^3 \text{m}^3}} \text{ दिन}$$

$$= 87.6 \text{ दिन}$$

इसी प्रकार आप सूर्य से ग्रहों की दूरी के आधार पर अन्य ग्रहों का परिक्रमण काल निकाल सकते हैं और आप अपनी गणनाओं की जाँच सारणी 5.1 की सहायता से कर सकते हैं:

सारणी. 5.1: सौर प्रणाली के ग्रहों संबंधी आंकड़े

ग्रह का नाम	सूर्य से माध्य दूरी (सूर्य से पृथ्वी की दूरी की तुलना में)	त्रिज्या ($\times 10^3$ km)	द्रव्यमान (पृथ्वी की तुलना में)
बुध	0.387	2.44	0.53
शुक्र	0.72	6.05	0.815
पृथ्वी	1.0	6.38	1.00
मंगल	1.52	3.39	0.107
बृहस्पति	5.2	71.40	317.8
शनि	9.54	60.00	95.16
यूरेनस	19.2	25.4	14.50
नेपच्यून	30.1	24.3	17.20
प्लूटो	39.4	1.50	0.002

टिप्पणियाँ

केपलर के नियम किसी भी ऐसे निकाय के लिए प्रयोग किये जा सकते हैं जहाँ उसके अवयवों को बाँधे रखने वाला बल गुरुत्वीय प्रकृति का होता है। उदाहरण के तौर पर वे बृहस्पति एवं इसके उपग्रहों के लिए और पृथ्वी और इसके उपग्रहों जैसे चन्द्रमा और कृत्रिम उपग्रहों पर भी लागू होते हैं।

उदाहरण 5.6 : एक उपग्रह का परिक्रमण काल 1 दिन के बराबर है। जैसा कि आप आगे जानेंगे कि ऐसे उपग्रहों को तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं। पृथ्वी की सतह से इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (दिया गया है कि पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी = 60 R_E है, जहाँ स्वंय R_E पृथ्वी की त्रिज्या है और चन्द्रमा का परिक्रमण काल स्थिर तारों के संदर्भ से 27.3 दिन है और पृथ्वी के संदर्भ से जो कि स्वयं सूर्य की परिक्रमा करती है 29.5 है।

हल : एक तुल्यकाली ग्रह का परिक्रमण काल T_2 = 1 दिन, चन्द्रमा के लिए T_1 = 27.3 दिन और $r_1 = 60\ R_E$, T_2 = 1 दिन। अत: समीकरण (5.15) का प्रयोग करने पर,

$$r_2 = \left[\frac{r_1^3 T_2^{\ 2}}{\mathrm{T}_1^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(60^3\ R_E^3)\,1\,(\text{दिन})^2}{(27.3\ \text{दिन})^2}\right]^{1/3} = 6.6\ R_E.$$

याद रखें कि उपग्रह की दूरी पृथ्वी के केन्द्र से मापी जाती है। पृथ्वी की सतह से ऊँचाई ज्ञात करने के लिए, R_E को 6.6 R_E से घटाना पड़ेगा। पृथ्वी की सतह से अपेक्षित दूरी = 5.6 R_E (जहाँ $\mathrm{R_E}$ पृथ्वी की त्रिज्या है)। यदि आप इस दूरी को किलोमीटर में प्राप्त करना चाहते हैं तो 5.6 को पृथ्वी की किलोमीटर में मापी गई त्रिज्या से गुणा करें।

5.5.1 ग्रहों का कक्षीय वेग

हम ऊपर ग्रहों के परिक्रमण काल के बारे में बात कर चुके हैं। यदि किसी ग्रह का परिक्रमण काल T और इसकी सूर्य से दूरी r हो तो यह T समय में $2\pi r$ दूरी तय करता है। अत: इसका कक्षीय वेग–

$$\upsilon_{\text{कक्षीय}} = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5.16)$$

कक्षीय वेग का मान प्राप्त करने की एक दूसरी विधि भी है। ग्रह पर लगे अभिकेन्द्र-बल का मान $m\upsilon_{\text{कक्षीय}}^2/r$ है, जहाँ m इसका द्रव्यमान है। यह बल सूर्य एवं ग्रह के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के द्वारा प्राप्त होता है। यदि $\mathrm{M_s}$ सूर्य का द्रव्यमान हो तो ग्रह पर लगने वाला गुरुत्वीय बल $\dfrac{G\,m\,M_s}{r^2}$ होगा। इन दो बलों की तुलना करने पर, हमें कक्षीय वेग $\upsilon_{\text{कक्षीय}}$ का मान प्राप्त होता है।

अर्थात्

$$\frac{m\upsilon_{\text{कक्षीय}}^{\ 2}}{r} = \frac{G\,M_s}{r^2},$$

अथवा

$$\upsilon_{\text{कक्षीय}} = \sqrt{\frac{G\,M_s}{r^2}} \qquad (5.17)$$

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त समीकरण में ग्रह का द्रव्यमान सम्मिलित नहीं है। अत: कक्षीय वेग ग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। कक्षीय वेग केवल सूर्य से ग्रह की दूरी पर निर्भर करता है। यह भी ध्यान दें कि यदि समीकरण 5.16 से v का मान (5.17)में प्रतिस्थापित करें तो हमें केपलर का तीसरा नियम प्राप्त होता है।

पाठगत प्रश्न 5.5

1. हमारी आकाश गंगा में बहुत से ग्रहीय निकायों की खोज हो चुकी है। क्या केपलर के नियम उनके लिए भी लागू होंगे?

2. दो कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी की सतह से 1000 km और 2000 km की ऊँचाई पर परिक्रमा कर रहे हैं। इनमें से किसका परिक्रमण काल अधिक होगा? यदि पहले उपग्रह का परिक्रमण काल 90 मिनट हो, तो दूसरे के परिक्रमण काल का मान ज्ञात कीजिए।

3. सौर प्रणाली में एक छोटे से नए पिंड सेडना की खोज हाल में ही हुई है। इसकी सूर्य से दूरी 86 AU है। (एक AU सूर्य से पृथ्वी के बीच की दूरी के बराबर होती है। इसका मान 1.5×10^{11} m के बराबर है। इसके परिक्रमण काल का मान वर्षों में ज्ञात कीजिए।

4. पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे एक उपग्रह के कक्षीय वेग के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

5. समीकरण (5.16) और (5.17) की सहायता से केपलर का तीसरा नियम प्राप्त करें।

5.6 पलायन वेग

आप जानते हैं कि ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद हमेशा वापस पृथ्वी पर आ जाती है। यदि इसे और जोर से ऊपर फेंका जाय तो यह कुछ अधिक ऊँचाई तक जाकर पुन: वापस आ जाती है। आप पूछ सकते हैं कि क्या यह सम्भव है कि कोई ऊपर को फेंकी गयी वस्तु पृथ्वी के आकर्षण प्रभाव क्षेत्र से दूर पहुँच सके? हाँ ऐसा संभव है। हमें इसके लिए वस्तु को एक निश्चित वेग प्रदान करना पड़ेगा, जिसे कि **पलायन वेग** कहते हैं। पृथ्वी के गुरुत्वीय आकर्षण से पूरी तरह बाहर निकल जाने के लिए वस्तु को ऊपर की ओर जितने नयूनतम वेग से फेंके जाने की आवश्यकता होती है, वह पलायन वेग कहलाता है।

यह स्पष्ट है कि पलायन वेग उस पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर करता है जिससे वस्तु दूर जाना चाहती है क्योंकि गुरुत्वीय बल द्रव्यमान का समानुपाती है। यह पिंड की त्रिज्या पर भी निर्भर करता है, क्योंकि कम त्रिज्या वाले पिंड का गुरुत्वीय बल अधिक होगा।

पृथ्वी से पलायन वेग निम्न प्रकार सूत्रबद्ध किया गया है।

$$v_{\text{पलायन}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{5.18}$$

जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान और R इसकी त्रिज्या है। इस सूत्र की सहायता से अन्य आकाशीय पिंडों के लिए भी पलायन वेग ज्ञात किया जा सकता है। किसी अन्य ग्रह या खगोलीय पिंड से पलायन वेग की गणना करने के लिए हमें उपरोक्त व्यंजक में उस खगोलीय पिंड के द्रव्यमान तथा त्रिज्या के मान रखने होंगे।

ऐसा नहीं है कि जब किसी वस्तु को पलायन वेग से ऊपर फेंका जाता है तो उस पर गुरुत्व बल नहीं लगता। यह कार्यरत रहता है। वस्तु का वेग और इस पर लगने वाला गुरुत्व बल दोनों वस्तु के सतह से दूर जाने पर कम होने प्रारम्भ हो जाते हैं, और ऐसा होता है कि वस्तु का वेग शून्य होने से पूर्व बल शून्य हो जाता है। अतः वस्तु गुरुत्व के खिंचाव से परे हो जाती है।

अपनी संकल्पना की पुष्टि के लिए निम्न प्रश्नों को समझने का प्रयास करें।

पाठगत प्रश्न 5.6

1. पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} kg है और त्रिज्या 6371 km है। पृथ्वी से पलायन वेग की गणना कीजिए।

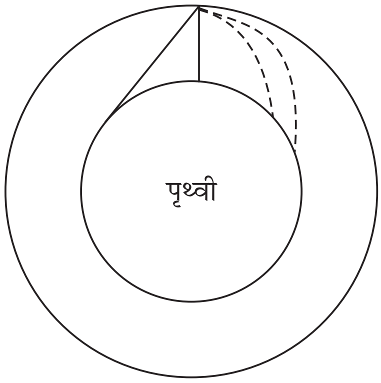
2. मान लीजिए कि पृथ्वी, बिना इसके द्रव्यमान में अंतर आए, अपनी त्रिज्या के 1/4 मान के बराबर सिकुड़ जाती है? इस स्थिति में पलायन वेग क्या होगा?

3. एक काल्पनिक उपग्रह X का द्रव्यमान पृथ्वी का आठ गुना और त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की दो गुनी है। इस ग्रह से पलायन वेग, पृथ्वी से पलायन वेग की तुलना में ज्ञात कीजिए।

5.7 कृत्रिम उपग्रह

सिडनी में खेले जा रहे क्रिकेट मैच को भारत वर्ष में देख सकते हैं। अमेरिका में खेले जा रहे टेनिस का खेल भी आप घर बैठे देख लेते हैं। क्या आपने कभी सोचा कि ऐसा कैसे संभव होता है? यह सब पृथ्वी का परिक्रमण कर रहे कृत्रिम उपग्रहों द्वारा संभव होता है। अब आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि कृत्रिम उपग्रह को कैसे किसी कक्ष में स्थापित किया जाता है?

आप पहले ही प्रक्षेप्य गति के बारे में पढ़ चुके हैं। यदि आप किसी वस्तु को क्षैतिज से एक कोण बनाते हुए फेंके तो इसका पथ परवलयाकार होता है। अब आप बढ़ाते हुए क्रम के बलों द्वारा फेंकी जा रही वस्तुओं की कल्पना करें। इसे चित्र (5.8) द्वारा स्पष्ट किया गया है। प्रक्षेप्य (वस्तुएं) धरती पर वापस आने से पूर्व बड़ी दूरियाँ बढ़ते क्रम में तय करती हैं। अंततोगत्वा, प्रक्षेप्य पृथ्वी के चारों ओर एक कक्ष में प्रवेश करते जाते हैं। याद रखें, ये उपग्रह मानव निर्मित हैं और इन्हें विशेष उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए स्थापित किया जाता है। चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।



चित्र 5.8: पृथ्वी के परिक्रमण के लिए प्रक्षेप्य

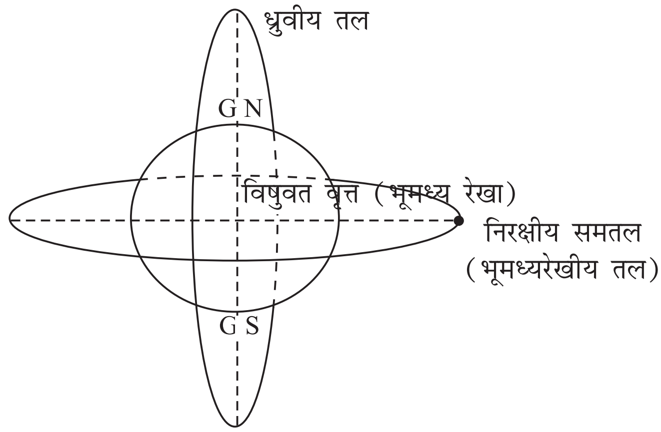
एक उपग्रह को कक्ष में स्थापित करने के लिए पहले उसे लगभग 200 km ऊपर उठाया जाता है और फिर 8 km s^{-1} के वेग से क्षैतिज दिशा में उस पर एक धक्का दिया जाता है। इसे ऊपर इसलिए उठाया जाता है जिससे कि पृथ्वी के वायुमण्डल में घर्षण के कारण ऊर्जा का क्षय न्यूनतम हो सके।

एक कृत्रिम उपग्रह का कक्ष भी केपलर के नियमों का पालन करता है क्योंकि नियामक बल पृथ्वी और उपग्रह के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल है। उपग्रह का परिक्रमण पथ दीर्घवृत्ताकार होता है और इसका तल हमेशा पृथ्वी के केन्द्र से गुजरता है।

स्मरण रहे कि एक कृत्रिम उपग्रह के कक्षीय वेग का मान पलायन वेग से कम होना चाहिए अन्यथा यह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से अलग हो जाएगा और पृथ्वी की परिक्रमा नहीं करेगा। पृथ्वी के निकट उपग्रह के कक्षीय वेग और पलायन वेग के अभिव्यंजक दर्शाते हैं कि

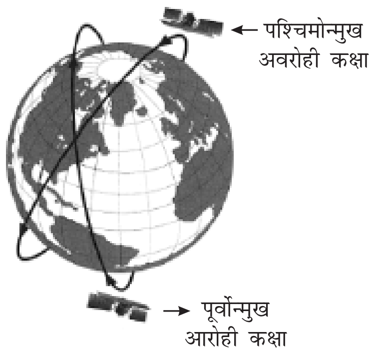
$$v_{\text{कक्षीय}} = \frac{v_{\text{पलायन}}}{\sqrt{2}} \qquad (5.19)$$

कृत्रिम उपग्रहों के प्रायः दो प्रकार के कक्ष होते हैं (चित्र 5.9) जो उनको छोड़े जाने के उद्देश्य पर निर्भर करते हैं। दूर संवेदन के कार्यों के लिए उपग्रहों का कक्ष ध्रुवीय होता है इन कक्षों की ऊँचाई लगभग 800 km होती है। यदि कक्ष की ऊँचाई 300 km से कम होती है तो वायुमण्डल में कणों के द्वारा उत्पन्न घर्षण के कारण उपग्रह की ऊर्जा का ह्रास होता है। जिसके कारण यह नीचे आने लगता है जहाँ वायुमण्डल का घनत्व और अधिक है और वहाँ पर यह जल जाता है। ध्रुवीय उपग्रहों का– आवर्तकाल (परिक्रमण काल) लगभग 100 मिनट है। एक ध्रुवीय उपग्रह को सूर्यसमकालिक बनाया जा सकता है ताकि यह प्रतिदिन नियत समय पर एक ही अक्षांश पर पहुँचे। लगातार चक्कर लगाने पर यह सम्पूर्ण पृथ्वी की सूक्ष्म जाँच (scanning) कर सकता है, क्योंकि पृथ्वी अपनी अक्ष पर घूमती है (चित्र 5.10)। इस प्रकार के उपग्रह मौसम संबंधी भविष्यवाणियों के लिए आंकड़े प्राप्त करने, बाढ़, फसलों व जंगल में लगी आग संबंधी जानकारी प्राप्त करने के लिए प्रयोग किये जाते हैं।



चित्र. 5.9: भूमध्यरेखीय तथा ध्रुवीय कक्षाएं

दूरदर्शन संकेतों एंव दूरभाष संकेतों के परावर्तन के लिए उपग्रहों को बहुत ऊँचाई पर भूमध्यरेखीय (विषुवतरेखीय) कक्ष में स्थापित किया जाता है। इन उपग्रहों में अधिकांश भू-समकालिक हैं जिनका परिक्रमण काल पृथ्वी की अपनी धुरी पर घूर्णनकाल काल (24 घंटा) के बराबर होता है। इनकी ऊँचाई 36000 km के लगभग रखी जाती है। चूँकि उनका परिक्रमण काल पृथ्वी के अपने अक्ष पर परिक्रमण काल से मेल खाता है, इसलिए ये एक ही स्थान पर स्थिर दिखाई देते हैं। ऐसे तीन उपग्रहों का संयोजन पूरी पृथ्वी के लिए पर्याप्त हैं और इनके द्वारा पृथ्वी में एक जगह से दूसरी जगह संकेत भेजे जा सकते हैं। चूँकि एक भू-समकालिक उपग्रह हमेशा पृथ्वी में एक ही स्थान का अवलोकन करता है, इसे किसी लंबे समय में विकसित होने वाली घटना के निरीक्षण जैसे तेज आँधी या तूफान आदि का अध्ययन करने के लिए किया जा सकता है।



चित्र. 5.10: पृथ्वी की सूक्ष्म जाँच करता हुआ भूसमकालिक उपग्रह

उपग्रहों के उपयोग

मानव के लिए कृत्रिम उपग्रह बहुत उपयोगी हैं। नीचे उनके कुछ उपयोग दिए गए हैं:

1. **मौसम संबंधी भविष्वाणियाँ :** उपग्रह सभी प्रकार के आँकड़े इकट्ठा करते रहते हैं जो कि अल्पकालिक और दीर्घकालिक भविष्वाणियों के विषय में उपयोगी होते हैं। दूरदर्शन या समाचार पत्रों में आप जो मौसम के चार्ट देखते हैं, वे उपग्रह द्वारा

भेजे गए आँकड़ों के आधार पर तैयार किए जाते हैं। भारत जैसे देश जहाँ वर्षा पर काफी कुछ निर्भर करता है, वहाँ पर मानसून संबंधी जानकारी के लिए ये उपग्रह उपयोगी हैं। इसके अलावा हमें बड़े क्षेत्रफल पर फसलों के अस्वस्थ रुझानों, संभावित बाढ़ या जंगल की आग लगने और फैलने संबंधी जानकारियाँ देकर ये हमें सावधान कर सकते हैं।

2. **नौ-संचालन :** कुछ उपग्रहों के संयोजन से किसी स्थान के बारे में बहुत सही जानकारी प्राप्त की जा सकती है। इसका उपयोग, तब किया जा सकता है जब हम रास्ता भटक गये हों और खो गये हों। उपग्रहों की सहायता से बड़े-बड़े भूखण्डों के विस्तृत जानकारी देने वाले मानचित्र बन गये हैं। अन्यथा जिन्हें बनाने में बहुत समय तथा ऊर्जा व्यय होती।

3. **दूरसंचार :** उपग्रहों द्वारा दूरदर्शन रेडियों एंव दूरभाष संकेतों को संसार में किसी भी जगह से कहीं भी भेजा जा सकता है। इससे अब संसार सिमटकर छोटा हो गया लगता है जिसे कभी-कभी ग्लोबल विलेज (वैश्विक गाँव) भी कहा जाता है।

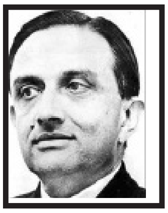
4. **वैज्ञानिक शोध :** उपग्रहों के माध्यम से वैज्ञानिक उपकरणों को अंतरिक्ष में पृथ्वी, चन्द्रमा, उल्काओं, ग्रहों, सूरज, सितारों व आकाशगंगाओं के प्रेक्षण के लिए भेजा जा सकता है। आपने हबल अंतरिक्ष दूरबीन और चन्द्र x- किरण दूरबीन का नाम सुना होगा। अंतरिक्ष में दूरदर्शक यंत्र होने का लाभ यह है कि दूर स्थित वस्तुओं से आने वाले प्रकाश को वायुमण्डल से नहीं गुजरना पड़ता है और इस प्रकार उसकी तीव्रता में मुश्किल से ही कोई कमी आती है। इसलिए हबल दूरदर्शी द्वारा लिए गऐ चित्र अन्य दूरदर्शक (पृथ्वी पर रखे) यंत्रों से अधिक स्पष्ट होते हैं।

   हाल ही में, यूरोपीय वैज्ञानिकों के एक संगठन ने हमारे सौर मण्डल के बाहर 20 प्रकाश वर्ष की दूरी पर एक पृथ्वी के समान ग्रह की उपस्थिति का अवलोकन किया।

5. **सैन्य गतिविधियों का निरीक्षण :** दुश्मन की सैन्य टुकड़ियों की गतिविधियाँ देखने के लिए कृत्रिम उपग्रह बहुत सहायक हैं। कृत्रिम उपग्रह का खर्चा वहन कर सकने में सक्षम लगभग सभी देशों के पास अपने उपग्रह हैं।

विक्रम अंबालाल-साराभाई

(1919-1971)



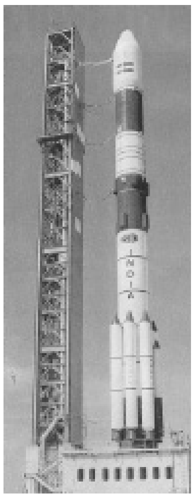
गुजरात प्रांत के अहमदाबाद के एक औद्योगिक परिवार में जन्में श्री विक्रम साराभाई हमेशा के लिए भारतीय विज्ञानियों के प्रेरणाश्रोत बने रहेंगे। उनका महत्वपूर्ण योगदान कॉस्मिक किरणों की सामयिक विविधता से रहा है। आपने अहमदाबाद में भौतिक शोध प्रयोगशाला की स्थापना की और भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान के अग्रदूत रहे। आपने ही सर्वप्रथम यह अनुभव किया कि अंतरिक्ष अनुसंधान के अंतर्गत दूरसंचार, शिक्षा, धातुकीय, रिमोटसेसिंग भूगणित आदि को जोड़ा जाना चाहिए।

5.7.1 भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (Indian Space Research Organisation)

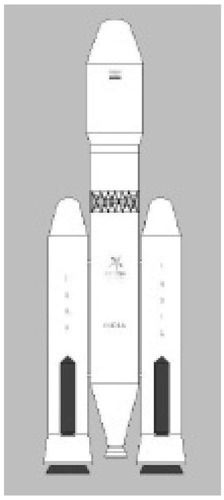
भारत एक बहुत बड़ा और घनी आबादी वाला देश है। यहाँ अधिकतर लोग गाँवों में रहते हैं और मानसून तथा वर्षा पर अत्यधिक आश्रित हैं। इसलिए मौसम का पूर्वानुमान करना सरकार के लिए एक महत्वपूर्ण कार्य है। बड़ी आबादी की संचार आवश्यकताओं की पूर्ति करना भी आवश्यक है। हमारे भूखण्ड पर कई स्थानों पर खनिज, तेल या गैस की उपस्थिति का अन्वेषण नहीं हो पाया है। उपग्रह तकनीक इन सभी समस्याओं का कम खर्चीला समाधान प्रस्तुत करती है। इन सब बातों को ध्यान में रखते हुए भारत सरकार ने 1969 में भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) की स्थापना की। ISRO ने दूरसंचार, दूरदर्शन, मौसम विज्ञानी सेवाओं, दूर संवेदी एंव वैज्ञानिक अनुसंधान के लिए अंतरिक्ष प्रणाली का विकास करने की दृष्टि से बहुत प्रबल कार्यक्रम का अनुसरण किया। इसने ध्रुवीय एंव भूसमकालिक उपग्रहों को छोड़ने के लिए प्रक्षेपण यानों का सफलता पूर्वक विकास कर लिया है। वास्तव में इसने दूसरे देशों जैसे जर्मनी, बेल्जियम, कोरिया आदि के उपग्रहों का प्रक्षेपण किया है और पाँच देशों के अतिविशिष्ट क्लब में सम्मिलित हो गया है। इसके वैज्ञानिक कार्यक्रम के अंतर्गत

(i) मौसम, पर्यावरण और वैश्विक बदलाव
(ii) ऊपरी वायुमण्डल
(iii) खगोलिकी एंव खगोल भौतिकी, और
(iv) भारतीय समुद्र आदि शामिल हैं।

अब यह चन्द्रमा पर जाने की तैयारी कर रहा है।



चित्र. 5.11: PSLV
(ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान)



चित्र. 5.12: GSLV
(भूसमकालिक उपग्रह प्रक्षेपण यान)

पाठगत प्रश्न 5.7

1. कुछ वैज्ञानिक लेखक विश्वास करते हैं कि कभी मनुष्य मंगल ग्रह में उपनिवेश स्थापित कर लेंगे। मान लीजिए ऐसा विचार रखने वाले लोग एक मंगल समकालिक उपग्रह को

कक्ष में स्थापित करना चाहते हैं। मंगल का परिक्रमण काल 24.6 घंटा है। इसका द्रव्यमान 6.4×10^{23} kg. एंव त्रिज्या 3400 km है। ऐसे उपग्रह की मंगल की सतह से ऊँचाई कितनी होगी?

2. अंतरिक्ष में दूरदर्शक यंत्र होने के क्या लाभ हैं?

आपने क्या सीखा

- ब्रह्माण्ड में किन्हीं दो कणों (वस्तुओं) के बीच गुरुत्वाकर्षण बल काम करता है। यह बल इन दो कणों (वस्तुओं) के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है।
- न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियमों में G एक सार्वत्रिक नियतांक है इसका मान ब्रह्माण्ड में सभी जगह समान रहता है।
- पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल सभी वस्तुओं को अपनी ओर खींचता है।
- पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वजनित त्वरण g का मान 9.8 m s^{-2} है। g का मान पृथ्वी की सतह पर बदलता है क्योंकि पृथ्वी पूर्ण गोलाकार नहीं है।
- गुरुत्वीय त्वरण का मान ऊँचाई, गहराई और अक्षांश के साथ बदलता है।
- किसी वस्तु पर लगने वाले गुरुत्वीय बल को उसका भार कहते हैं।
- r दूरी द्वारा पृथक्कृत M एवं m द्रव्यमान के दो कणों की स्थितिज ऊर्जा, $V = -\dfrac{GMm}{r}$ होती है।
- केपलर के प्रथम नियमानुसार किसी ग्रह की कक्षा दीर्घ वृत्ताकार होती है और सूर्य इसके किसी एक फोकस पर विद्यमान होता है। केपलर के दूसरे नियमानुसार उपग्रह को सूर्य से जोड़नेवाली रेखा समान समय में समान क्षेत्रफल प्रसर्प (sweep) करती है।
- केपलर के तीसरे नियम के अनुसार किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग ग्रह की सूर्य की माध्य दूरी के तीसरे घात का समानुपाती होता है।
- यदि कोई वस्तु पलायन वेग या इससे अधिक वेग प्राप्त कर ले तो वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र से बाहर चली जा सकती है।
- किसी उपग्रह का कक्षीय वेग उसकी पृथ्वी से दूरी पर निर्भर करता है।

पाठांत प्रश्न

1. आप जानते हैं कि गुरुत्वीय आकर्षण पारस्परिक हैं। यदि ऐसा है तो क्या सेब भी पृथ्वी को आकर्षित करता है? यदि, हाँ तो इसके फलस्वरुप पृथ्वी अपना स्थान क्यों नहीं बदलती?
2. हम पृथ्वी की सतह पर एक निश्चित दूरी द्वारा विलगित दो कणों के बीच कार्यकारी गुरुत्वाकर्षण बल का मान ज्ञात करने के लिए एक प्रयोग करते हैं। माना कि यह बल F है। इसी समायोजन को हम चन्द्रमा पर ले जाकर पुन: प्रयोग करते हैं। वहाँ पर दो द्रव्यमानों (कणों) के बीच लगने वाले बल का मान क्या होगा?

3. मान लें कि पृथ्वी बिना द्रव्यमान बदले अपने आकार की दो गुना हो जाती है। तब आपका भार क्या हो जाएगा यदि इस समय आपका भार 500 N है?
4. कल्पना करें कि अचानक पृथ्वी अपना गुरुत्वाकर्षण बल खो देती है। पृथ्वी की सतह पर रहने वाले लोगों पर इसका क्या प्रभाव पड़ेगा?
5. चित्र 5.6 में पृथ्वी की संरचना दिखाई गई है। भूपर्पटी की तली (गहराई 25 km) तथा प्रावार की तली (गहराई 2855kg) पर g के मान की गणना करें।
6. चन्द्रमा के परिक्रमण काल एंव इसकी कक्षा की त्रिज्या के आधार पर पृथ्वी के द्रव्यमान का व्यंजक ज्ञात कीजिए।
7. माना पृथ्वी पर आपका भार 500N है। चन्द्रमा पर आपका भार कितना होगा? चन्द्रमा पर आपका द्रव्यमान कितना होगा?
8. एक ध्रुवीय उपग्रह को पृथ्वी की सतह से 800 km ऊँचाई पर स्थापित किया गया है। इसका परिक्रमण काल व कक्षीय वेग ज्ञात करें।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

5.1

1. चन्द्रमा का परिक्रमण काल $T = 27.3\text{d}$

$$= 27.3 \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

चन्द्रमा की कक्षा की त्रिज्या $R = 3.84 \times 10^8$ m.

चन्द्रमा की कक्षीय चाल $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$

अभिकेन्द्र-त्वरण $= \upsilon^2/R$

$$= \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3.84 \times 10^8 \text{m}}{(27.3 \times 24 \times 3600)^2 \text{ s}^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 \times 3.84}{(27.3 \times 2.4 \times 3.6)^2} \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

$$= .00272 \text{ m s}^{-2}$$

यदि हम g को 3600 से भाग देकर अभिकेन्द्र-त्वरण का मान ज्ञात करें तो हम देखेंगे कि दोनों के मान समान हैं।

$$= \frac{9.8}{3600} \text{ m s}^{-2} = 0.00272 \text{ m s}^{-2}$$

2. $F = \dfrac{G\,m_1\,m_2}{r^2}$

F बल है $\therefore G = \dfrac{\text{बल} \times r^2}{(\text{द्रव्यमान})^2} = \dfrac{Nm^2}{kg^2}$

3. $F = G\,\dfrac{m_1\,m_2}{r^2}$

यदि $m_1 = 1$kg., $m_2 = 1$kg, $r = 1$ m , तब F = G

अथवा G दो एक kg के 1 मीटर की दूरी पर रखे द्रव्यमानों के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है।

4. (i) F α $1/r^2$, यदि r दो गुना कर दिया जाय तो बल एक चौथाई रह जाएगा।

(ii) F α $m_1 m_2$, यदि m_1 और m_2 दोनों के मान दो गुना कर दिए जाएं तो F चार गुना हो जाएगा।

(iii) F α $\dfrac{m_1\,m_2}{r^2}$,

यदि प्रत्येक द्रव्यमान दो गुना कर दिया जाएं और उनके बीच की दूरी भी दो गुनी कर दी जाएं तो

F अपरिवर्तित रहेगा।

5. $F = G\,\dfrac{50\text{ kg} \times 60\text{ kg}}{1\text{ m}^2}$; $G = 6.68 \times 10^{-11}\,\dfrac{Nm^2}{kg^2}$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \times \frac{3000\text{ kg}^2}{1\text{ m}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times 3 \times 10^3\text{ N}$$

$$= 2 \times 10^{-7}\text{ N}$$

5.2

1. $g = \dfrac{GM}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11}\,\dfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot \dfrac{5.97 \times 10^{24}\text{ kg}}{(6.371 \times 10^6)^2\text{ m}^2} = \dfrac{6.97 \times 59.7}{6.371 \times 6.371}\,\dfrac{N}{kg}$

$$= 9.81\text{ m s}^{-2}$$

2. ध्रुवों पर g का मान

$$g_{pole} = \frac{GM}{R^2_{pole}} = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{5.97 \times 10^{24}\text{ kg}}{(6.371 \times 10^6)^2\text{ m}^2}$$

$$= \frac{6.97 \times 59.7}{6.371 \times 6.371}\,\frac{N}{kg} = 9.81\text{ m s}^{-2}$$

इसी प्रकार:

$$g_{\text{equator}} = \frac{6.97 \times 59.7}{6.378 \times 6.378} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9.79 \text{ m s}^{-2}$$

3. प्रत्येक स्थिति में g ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है। ऐसा हमेशा होता है।

4. $g_{\text{moon}} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{7.3 \times 10^{22}\text{kg}}{(1.74 \times 10^6)^2 \text{m}^2}$

$$= \frac{6.67 \times 7.3}{1.74 \times 1.74} \times 10^{-1} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1.61 \text{ m s}^{-2}$$

5.3

1. माना कि r दूरी पर g का मान g_1 है।

पृथ्वी के बाहर

तब $\frac{g}{g_1} = \frac{r^2}{\text{R}^2}$

यदि $g_1 = g/2 \Rightarrow r^2 = 2R^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}\,R = 1.412\,R$

$\therefore$ पृथ्वी की सतह से ऊँचाई $= 1.4142\,R - R$

$= 0.4142\,R$

2. पृथ्वी के अन्दर g का मान केन्द्र से दूरी के अनुसार परिवर्तित होता है। माना गहराई d पर g का मान g_d है।

तब $\frac{g_d}{g} = \frac{\text{R} - d}{\text{R}}$

यदि $g_d = 80\%$, तब

$$\frac{0.8}{1} = \frac{\text{R} - d}{\text{R}}$$

$\therefore \quad d = 0.2\,R$

3. उदाहरण 5.3 में हमने $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$ rad s^{-1} गणना की

$\therefore \text{R}\omega^2 \cos 30^\circ = 6.37 \times 10^6 \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \text{ s}^{-2} . \sqrt{3}/2 = 0.029 \text{ m s}^{-2}$

ध्रुवों पर g अर्थात् $g_{poles} = 9.853 \text{ m s}^{-2}$

(उदाहरण 5.2 में गणना की गई है)

$\therefore$ दिल्ली में $g = 9.853 \text{ m s}^{-2} - 0.029 \text{ m s}^{-2}$

$$= 9.824 \text{ m s}^{-2}$$

4. सूत्र (5.9) का प्रयोग करने पर

$$g_h = \frac{g}{1+\frac{2h}{R}} = \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{1+\frac{2000 \text{ km}}{6371 \text{ km}}}$$

$$= \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{\frac{28371 \text{ km}}{6371 \text{ km}}} = 7.47 \text{ m s}^{-2}$$

r के साथ परिवर्तन का प्रयोग करने पर

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5.97 \times 10^{24} \text{kg}}{(7.371 \times 10^6)^2 \text{m}^2}$$

$$= 7.33 \text{ ms}^{-2}$$

यह अधिक सटीक परिणाम देता है क्योंकि सूत्र (5.9) $h << R$ के लिए है। इस मामले में $h << R$ नहीं है।

5.4

1. चन्द्रमा पर g का मान पृथ्वी पर g के मान का 1/6 होता है। अतः आपका भार पृथ्वी की अपेक्षा चन्द्रमा में 1/6 हो जाएगा। द्रव्यमान अपरिवर्तित रहता है।

2. मंगल का द्रव्यमान $= 6 \times 10^{23}$ kg

 मंगल की त्रिज्या $= 4.3 \times 10^6$ m

$$\therefore \quad g_{Mars} = G\frac{M}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \times 10^{23} \text{kg}}{(4.3 \times 10^6)^2 \text{m}^2} = 2.16$$

$$\frac{\text{मंगल का भार}}{\text{पृथ्वी का भार}} = \frac{m.2.16}{m.9.81} = 0.22$$

अत: मंगल ग्रह में आपका भार पृथ्वी पर आपके भार का लगभग एक चौथाई हो जाता है। द्रव्यमान समान रहता है।

3. दो पलड़ों वाली तुला वास्तव में दोनों द्रव्यमानों की तुलना करती है क्योंकि g दोनों पलड़ों पर काम करता है और निरस्त हो जाता है। स्प्रिंग तुला भार मापती है। पलड़ों वाली तुला द्वारा चन्द्रमा पर भी मापन किया जा सकता है। लेकिन स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक चन्द्रमा पर पृथ्वी की तुलना में 1/6 रह जाएगा।

4. गुरुत्वीय विभव का SI मात्रक J kg^{-1} है।

5.5

1. हाँ, जब भी दो वस्तुओं के बीच लगने वाला बल गुरुत्वीय प्रकृति का हो तो केपलर के नियम प्रयोग किए जा सकेंगे।

2. केपलर के तृतीय नियम के अनुसार

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \text{अथवा} \quad T^2 \propto r^3 \Rightarrow T \propto r^{3/2}$$

इसलिए अधिक दूरी पर स्थित उपग्रह का आवर्तकाल अधिक होता है।

माना $T_1 = 90$ मिनट, $r_1 = 1000\text{ km} + 6371\text{ km}$

$$r_2 = 2000\text{ km} + 6371\text{ km}$$

[पृथ्वी के केन्द्र से]

$$\therefore \quad T_2^2 = \frac{T_1^2 . r_2^3}{r_1^3} = (90\text{ min})^2\left(\frac{8371\text{ km}}{7371\text{ km}}\right)^3$$

$$T_2 = 108.9\text{ min}$$

3. केपलर के तृतीय नियम के अनुसार

$$\frac{T_{earth}^2}{T_{sedna}^2} = \frac{r_{earth}^3}{r_{sedna}^3}$$ [सूर्य से दूरी]

$T_{earth} = 1$ वर्ष, $r_{earth} = 1$ AU

$$T_{sedna}^2 = \frac{(1\text{वर्ष})^2(86\text{ AU})^3}{(1\text{AU})^3} = (86)^3(\text{वर्ष})^2$$

$\therefore\ T_{sedna} = 797.5$ वर्ष

4. यदि पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर स्थित m द्रव्यमान के उपग्रह का कक्षीय वेग υ हो तो अभिकेन्द्र बल और गुरुत्वीय बलों की तुलना करने पर

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान है।

5. समीकरणों (5.16) और (5.17) से

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 . r^3}{GM.}$$

or $T^2 \propto r^3$.

5.6

1. $\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$= \sqrt{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} . \frac{5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{6.371 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 5.97 \times 10}{6.371}}\ 10^3\ \text{m s}^{-1}$$

$$= 11.2 \times 10^3\ \text{m s}^{-1} = 11.3\ \text{km s}^{-1}$$

2. $\upsilon_{esc}\ \alpha \sqrt{\frac{1}{R}}$

यदि R 1/4R हो, तो υ_{esc} का मान दो गुना हो जाएगा।

3. $\upsilon_{esc}\ \alpha \sqrt{\frac{M}{R}}$

यदि M 8 गुना हो जाय और R दो गुना हो जाए तो

$\upsilon_{esc}\ \alpha \sqrt{4} = 2$ गुना हो जाएगा।

टिप्पणियाँ

5.7

1. $(R+h)\dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$

$$\Rightarrow (R+h)^3 = \frac{GM}{4\pi^2}\, T^2 = \frac{6.67\times10^{-11}\times6.4\times10^{23}\times(14.6\times3600)^2}{4\times(3.14)^2}$$

$$= 8370\times10^{18}\ \text{m}$$

$$R+h = 20300\ \text{km}$$

$$h = 26900\ \text{km}$$

2. (a) प्रतिबिंब ज्यादा स्पष्ट बनते हैं:

(b) x-किरण दूरदर्शी आदि भी कार्य करते हैं।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

3. 125 N

5. $\sqcup\, g$, 5.5 m s^{-2}

7. भार $= \dfrac{500}{6}$ N, द्रव्यमान चन्द्रमा पर भी 50 kg ही रहेगा।

8. $T \sqcup 1\frac{1}{2}$h, $v = 7.47$ km s^{-1}