8

312hi08

ठोस के प्रत्यास्थ गुण

पिछले अध्यायों में आप किसी बल के प्रभाव से किसी वस्तु में होने वाले विस्थापन का अध्ययन कर चुके हैं। किसी वस्तु पर लगाया गया बल उस वस्तु के साइज या आकृति या दोनों को परिवर्तित कर सकता है। उदाहरण के लिए जब किसी धातु की कमानी पर इसकी लम्बाई के अनुदिश उपयुक्त बल लगाया जाता है तो इसकी आकृति एवं साइज़ दोनों में परिवर्तन हो जाता है। जब बल हटा लिया जाता है तो यह अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। अब आप गीली चिकनी मिट्‌टी या पिघले हुए मोम से बनी किसी वस्तु पर बल लगाएँ। क्या लगाया गया बल हटा देने पर वे अपने पूर्व स्थिति को प्राप्त कर लेते हैं? नहीं, वे अपनी मूल आकृति या साइज़ प्राप्त नहीं कर पाती। इस प्रकार कुछ वस्तुएँ अपनी पूर्व आकृति एवं साइज़ दोबारा प्राप्त कर लेती हैं जबकि कुछ वस्तुओं के मामले में ऐसा नहीं होता है। वस्तुओं का ऐसा व्यवहार उनके एक गुण पर निर्भर करता है, जिसे **प्रत्यास्थता** कहते हैं।

पदार्थों की प्रत्यास्थ प्रकृति (गुण) का हमारे दैनिक जीवन में काफी महत्व है। इसकी सहायता से आप किसी वस्तु जैसे कार, क्रेन, लिफ्ट आदि को लटकाने में प्रयुक्त होने वाले केबलों (रज्जुओं) की सामर्थ्य को ज्ञात कर सकते हैं। इस गुण का प्रयोग भवनों और पुलों के निर्माण में प्रयुक्त दंडो (बीमों) की सामर्थ्य का पता लगाने में किया जाता है। इस इकाई में आप प्रत्यास्थ परिवर्तनों की प्रकृति एवं इनकी व्याख्या करना सीखेंगे।

उद्‌देश्य

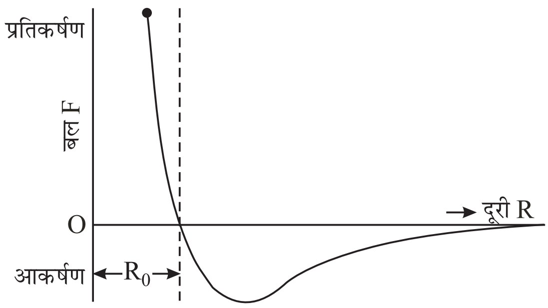
इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप:

- पदार्थ के आणविक सिद्धांत के आधार पर पदार्थ की तीन अवस्थाओं में भेद कर सकेंगे;
- प्रत्यास्थ एवं प्लास्टिक (सुघट्य) वस्तुओं में भेद कर सकेंगे;
- प्रतिबल और दाब में भेद कर सकेंगे;
- किसी प्रत्यास्थ ठोस के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र का अध्ययन कर सकेंगे;
- यंग का गुणाँक, आयतन गुणाँक, दृढ़ताँक एवं प्वासों अनुपात को परिभाषित कर सकेंगे; और
- किसी स्पिंग की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक व्युत्पन्न कर सकेंगें।

टिप्पणियाँ

8.1 द्रव्य का आणविक सिद्धांतः अंतरा-अणुक बल

हम जानते हैं कि प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं और अणुओं से मिलकर बना होता है। परमाणुओं और अणुओं के बीच कार्यरत बल से द्रव्यों की संरचना का निर्धारण होता है। अणुओं के बीच अन्योन्यक्रिया बलों को अंतरा-अणुक बल कहते हैं।



चित्र. 8.1 : अंतरा-अणुक बल और अंतरा-अणुक पार्थक्य के बीच ग्राफ

अंतरा-अणुक बल और अंतरा-अणुक अन्तराल के बीच विचरण के ग्राफ को चित्र 8.1 में दिखाया गया है। जब दो अणुओं के बीच पार्थक्य अधिक होता है, तो उनके बीच आकर्षण बल लगता है जिसका परिमाण कम होता है। जब अणुओं के बीच पार्थक्य घटता है, तो कुल आकर्षण बल एक सीमा तक बढ़ता है और इसके परे बल प्रतिकर्षक (Repulsive) हो जाता है। R_0 दूरी पर दो अणुओं के बीच लगने वाला बल शून्य होता है। यह पार्थक्य (R) साम्य पार्थक्य कहलाता है।

अतः यदि अंतरा-अणुक पार्थक्य $R > R_0$ तो अणुओं के बीच आकर्षक बल कार्य करता है। जब $R < R_0$ तब अणुओं के बीच प्रतिकर्षक बल कार्य करता है।

ठोस पदार्थ में, साम्य पार्थक्य की अवस्था में अणु एक-दूसरे के काफी निकट होते हैं (□ 10^{-10} m) उच्च अंतरा-आणविक बलों के कारण वे अपनी स्थिति पर लगभग स्थिर रहते हैं। अब आप समझ सकते हैं कि किसी ठोस पदार्थ का आकार निश्चित क्यों होता है। द्रवों में, अणुओं के बीच औसत पार्थक्य थोड़ा अधिक होता है, तो आकर्षण बल क्षीण होता है, और अणु तुलनात्मक रूप से द्रव पदार्थ के संपूर्ण द्रव्यमान के भीतर गतिशील रहने के लिए अधिक स्वतंत्र रहते हैं। अब आप समझ सकते हैं कि द्रव पदार्थों का आकार निश्चित क्यों नहीं होता है। द्रव पदार्थ जिस बरतन में रखे जाते हैं उसी की आकृति ग्रहण कर लेते हैं। गैसों में अंतरा-आणविक पार्थक्य बहुत ज्यादा होता है और आणविक बल काफी क्षीण होता है (लगभग नगण्य)। अणु किसी बर्तन में गति करने के लिए पूर्णस्वतंत्र होते हैं। इसलिए गैसों का आयतन और आकृति निश्चित नहीं होते।

परमाणु के विषय में प्राचीन भारतीय दृष्टिकोण

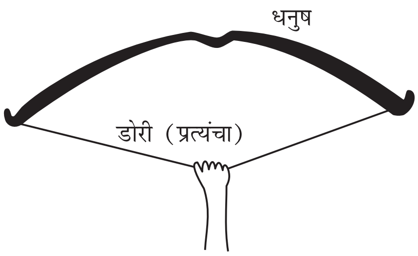
संसार में परमाणु की संकल्पना प्रतिपादित करने वाले कणाद प्रथम व्यक्ति थे। उनका जीवन काल ईसा से लगभग छह शताब्दी पूर्व का है। वे प्रभास (इलाहाबाद के पास) के निवासी थे।

उनके अनुसार, ब्रह्माण्ड की प्रत्येक वस्तु परमाणु या अणु से बनी है। ये शाश्वत एवं अविनाशी हैं। परमाणु संयोजन करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं। यदि दो परमाणु मिलकर अणु बनाते हैं तो इसे द्विअणुक और तीन परमाणुओं से मिलकर बने अणु को त्रिअणुक कहते हैं। वे 'वैशेषिक सूत्र'' के लेखक थे। परमाणुओं के साइज़ का अनुमान भी लगाया गया था। बुद्ध की जीवनी (ललिताविस्तार) में भी परमाणु का साइज़ अनुमानित था। वहाँ इसे 10^{-10} m की कोटि का आँका गया था, जो कि परमाणु के वर्तमान काल में आँके गए साइज़ के काफी सन्निकट है।

8.2 प्रत्यास्थता

आपने ध्यान दिया होगा कि जब किसी वस्तु पर बाह्य बल का प्रयोग किया जाता है तो इसकी आकृति या साइज़ (अथवा दोनों) बदल जाते हैं अर्थात विरूपण उत्पन्न हो जाता है। विरूपण कितना होता है यह वस्तु के पदार्थ, आकृति और बाह्य बल पर निर्भर करता है। जब विरूपण करने वाले बल हट जाते हैं तो वस्तु अपनी पुरानी आकृति और साइज़ प्राप्त करने का प्रयास करती है।

उदाहरण के तौर पर आप स्प्रिंग पर कोई भार लटका दें तो इसकी लम्बाई में परिवर्तन आ जाता है और भार हटा देने पर वह अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। इसी प्रकार यदि रबर की गेंद को दबाया जाए तो वह दब जाती है और दाब हटा लेने पर अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। इसी प्रकार यदि धनुष की डोरी पर बल लगाएँ तो इसकी आकृति बदल जाती है और बल हटा देने पर यह अपनी पूर्वावस्था में आ जाता है (चित्र 8.2)।



चित्र 8.2 : धनुष की डोरी पर लगाए गए बल से उसकी आकृति में परिवर्तन हो गया है

किसी वस्तु का वह गुण जिसके फलस्वरूप विरूपक बल हटाने पर वस्तु पुनः अपनी मूल आकृति एवं साइज़ (आमाप) प्राप्त कर लेती है, **प्रत्यास्थता** कहलाता है।

8.2.1 प्रत्यास्थ एवं सुघट्य वस्तुएँ

एक वस्तु जो विरूपक बल के हटने पर पूर्ण रूप से अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है, **पूर्ण प्रत्यास्थ** कहलाती है। दूसरी ओर, यदि विरूपक बल हटा लेने कोई वस्तु अपने मूल आकृति में आने की कोई प्रवृत्ति नहीं रखती और अपने परिवर्तित रूप में ही रह जाती है, तो उसे **पूर्ण सुघट्य** कहते हैं। तथापि,व्यवहार में सभी वस्तुएँ इन्हीं दो सीमाओं के बीच ही व्यवहार करती हैं। प्रकृति में न तो कोई पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु है और न ही कोई पूर्ण सुघट्य वस्तु। क्वार्टज रेशे को लगभग पूर्ण प्रस्यास्थ माना जा सकता है और सामान्य पुट्टी पूर्ण सुघट्य है। जो वस्तु

विरूपण का जितना विरोध करती है, वह उतनी ही प्रत्यास्थ होती है। नि:संदेह प्रत्यास्थ विरूपण विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के लिए काफी महत्वपूर्ण है, लेकिन यांत्रिक प्रक्रियाओं में प्लास्टिक विरूपण भी महत्वपूर्ण है। आपने धातुओं पर मोहर लगाने की, धातु के टुकड़ो को मोड़ने और ढोकने-पीटने की प्रक्रियाऐं देखी होंगी। ये सभी कार्य प्लास्टिक विरूपण के कारण ही संभव है। प्रस्थ्यास्थता की व्याख्या अंतरा-अणुक बलों के पदों द्वारा की जा सकती है।

8.2.2 प्रत्यास्थता का आणविक सिद्धान्त

जैसा कि आप जानते हैं कि ठोस वस्तु एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित बहुत से परमाणुओं से निर्मित होती है। प्रत्येक परमाणु पर उसके आस-पास के परमाणुओं के बलों का प्रभाव पड़ता है। अंतरापरमाणुक बलों के कारण ठोस की ऐसी आकृति बनी रहती है कि प्रत्येक परमाणु स्थिर साम्य अवस्था में रहता है। जब वस्तु निरूपित हो जाती है, तो परमाणु अपनी मूल दशा से हट जाते हैं और उनकी अंतरापरमाणुक दूरियाँ बदल जाती हैं। यदि विकृति में पार्थक्य उनके साम्य पार्थक्य से बढ़ जाता हैं (अर्थात, $(R > R_0)$ तो प्रबल आकर्षण बल उत्पन्न होते हैं और इसके विपरीत, यदि उनकी अंतरापरमाणुक दूरी घट जाती है (अर्थात्, $R < R_0$), तो प्रबल प्रतिकर्षण बल उत्पन्न होते हैं। इन बलों को **प्रत्यानयन बल** कहते हैं। ये बल परमाणुओं को अपनी पूर्व स्थिति में ले आते हैं। ठोस वस्तु के परमाणुओं के व्यवहार की तुलना एक ऐसे तंत्र से की जा सकती है जिसमें गेंदे स्प्रिंगों से जुड़ी हों।

अब हम उन तरीकों का अध्ययन करते हैं जिनसे वस्तु को विरूपित करने के लिए बल लगाए जाते हैं।

8.2.3 प्रतिबल

जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य बल या कोई बाह्य बल-तंत्र लगाया जाता है, तो वस्तु की आकृति या साइज़ में लगाए जाने वाले बल की प्रकृति के अनुसार परिवर्तन होता है। हम पहले व्याख्या कर चुके हैं कि विरूपण की प्रक्रिया में, अपनी साम्यावस्था से अणुओं के विस्थापन के कारण आतंरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है। यह बल विरूपण का विरोध करता है।

विरूपित वस्तु के अनुप्रस्थ परिच्छेद के प्रति इकाई क्षेत्र पर कार्य करने वाले आतंरिक प्रत्यानयन बल को प्रतिबल कहा जाता है।

साम्यावस्था में प्रत्यानयन बल परिमाण में विरूपक बल के समान होता है तथा इसकी दिशा बाह्य विरूपक बल की दिशा के विपरीत होती है। इसी कारण प्रतिबल को साम्यावस्था में आने पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के प्रति इकाई क्षेत्र में लगने वाले बाह्य बल द्वारा मापा जाता है। यदि विरूपक बल का परिमाण F है और यह A क्षेत्रफल में कार्यरत है, तो इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं–

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{प्रत्यानयन बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{\text{विरूपक बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$$

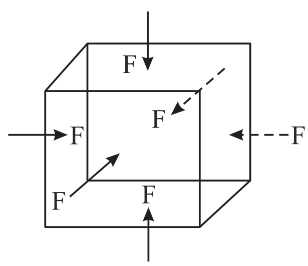
या $$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} \qquad (8.1)$$

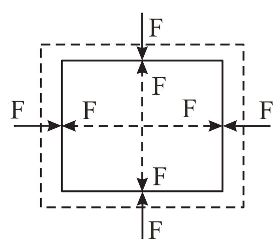
प्रतिबल का मात्रक Nm^{-2} है। प्रतिबल, अनुदैर्ध्य, अभिलम्बवत् या अपरुपक हो सकता है। आइए, इनके बारे में क्रमशः जानें।

(i) **अनुदैर्ध्य प्रतिबल :** यदि विरूपक बल वस्तु की लंबाई की दिशा में हो, तो उत्पन्न प्रतिबल **अनुदैर्ध्य प्रतिबल** कहलाता है। चित्र 8.3 (a) और चित्र 8.3 (b).

Fig 8.3 (a) : तनन प्रतिबल (b) संपीडन प्रतिबल

(ii) **अभिलम्बवत् प्रतिबल:** यदि विरूपक बल वस्तु के संपूर्ण सतह पर समान एवं लंबवत् लगाया जाए जिससे कि वस्तु की आकृति में परिवर्तन न हो, लेकिन आयतन में परिवर्तन हो जाए (चित्र 8.4) तो इस प्रकार उत्पन्न प्रतिबल को अभिलम्बवत् प्रतिबल कहा कहा जाता है। आप वस्तु की संपूर्ण सतह पर एक समान दाब लगाकर अभिलंबवत् प्रतिबल उत्पन्न कर सकते हैं। किसी सतह के अभिलंबवत प्रति इकाई क्षेत्रफल में कार्य करने वाला विरूपक बल दाब कहलाता है, जबकि सतह के अभिलंब प्रति इकाई क्षेत्रफल पर उत्पन्न आंतरिक प्रत्यानयन बल को **प्रतिबल** कहते हैं।

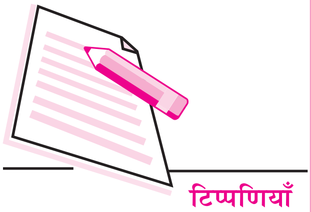




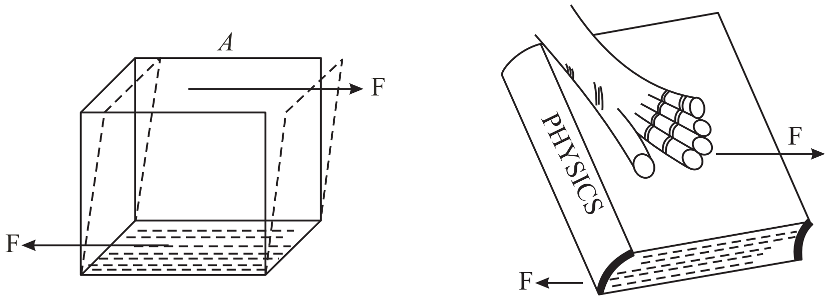
(a) (b)

चित्र. 8.4 : अभिलम्बत् प्रतिबल

(iii) **अपरूपक प्रतिबल :** यदि विरूपक बल सतह के समान्तर या स्पर्शरेखीय ढंग से कार्य करता है (चित्र 8.5 a) जिससे कि वस्तु के आयतन में परिवर्तन हुए बिना आकृति में परिवर्तन हो जाता है, तो इस प्रकार का प्रतिबल अपरुपक प्रतिबल कहलाता है। अपरूपक प्रतिबल का एक उदाहरण चित्र 8.5(b) में दर्शाया गया है जिसमें पुस्तक को तिरछे ध क्का दिया जाता है। इसके विपरीत फलक को घर्षण रोके रखता है।



टिप्पणियाँ



चित्र. 8.5: (a) अपरूपक प्रतिबल (b) पुस्तक को किनारे से खिसकाना

8.2.4 विकृति (Strain)

विरूपक बलों से वस्तु की विमाओं में परिवर्तन हो जाता है। सामान्य रूप से **वस्तु की विमा में प्रति इकाई विमा परिवर्तन (जैसे लंबाई, आकार या आयतन) को विकृति कहते हैं।** यह दो सदृश्य राशियों का अनुपात होने के कारण विमाहीन राशि है। विरूपक बल के लगाए गए प्रकार के अनुसार, विकृति तीन प्रकार की होती हैं, (1) रेखीय विकृति (2) आयतन विकृति और (3) अपरूपक विकृति।

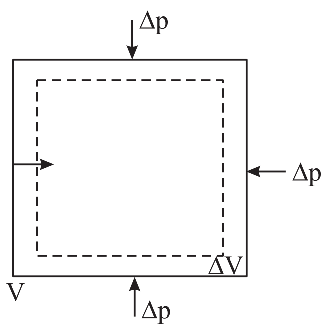
(i) **रेखीय विकृति :** यदि अनुदैर्घ्य अपरूपक बल के उपयोग से किसी वस्तु की लंबाई ℓ में $\Delta\ell$ परिवर्तन होता है (चित्र 8.6) तो

$$\text{रेखीय विकृति} = \frac{\text{लंबाई में परिवर्तन}}{\text{मूल लंबाई}} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

चित्र. 8.6: रेखीय विकृति

(ii) **आयतन विकृति :** जब एक समान दाब Δp के प्रयोग से किसी वस्तु की आकृति में परिवर्तन हुए बिना उसके आयतन V में ΔV परिवर्तन हो (चित्र 8.7) तब

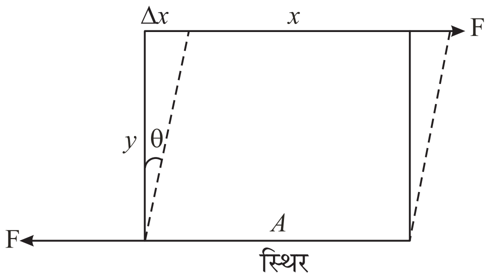
$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{मूल आयतन}} = \frac{\Delta V}{V}$$



चित्र. 8.7: आयतन विकृति

(iii) **अपरूपक विकृति:** जब अपरूपक बल स्पर्श रेखीय (चित्र 8.8) हो, तो अपरूपक विकृति उस कोण द्वारा ज्ञात की जाती है जो निश्चित तल पर एक लंब रेखा विरूपण के बाद बनाती है, यदि कोण का मान बहुत कम हो, तो

$$\theta = \frac{\Delta x}{y}$$



चित्र. 8.8 : अपरूपक विकृति

8.2.5 धातु तार के लिए प्रतिबल-विकृति

एकसमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले धातुतार पर बाह्य बल बढ़ते भार के क्रम में लगाने पर पर उसकी विकृति के साथ प्रतिबल दर्शाने वाला वक्र चित्र 8.9 में दर्शाया गया है। हम इस वक्र में उन क्षेत्रों और बिंदुओं का अध्ययन करेंगे जिनका विशिष्ट महत्व है।

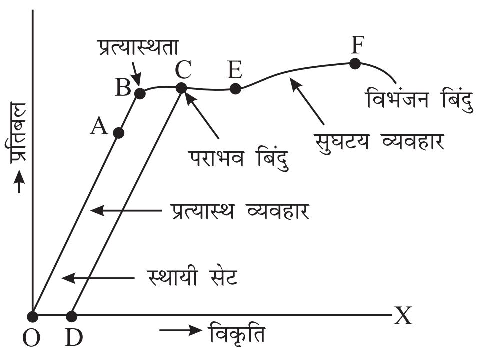


Fig. 8.9: एक इस्पात के तार के लिए प्रतिबल विकृति वक्र

(i) **समानुपातिक क्षेत्र OA:** वक्र का OA भाग सीधी रेखा है जिससे पता चलता है कि इस क्षेत्र में प्रतिबल विकृति के समानुपातिक है और वस्तु का व्यवहार पूर्ण रूप से प्रत्यास्थ वस्तु के सदृश है।

(ii) **प्रत्यास्थता सीमा** : यदि विकृति को A थोड़ा और बढ़ा दिया जाए तो प्रतिबल विकृति के पूर्णरूपेण समानुपाती नहीं होता है। तथापि, तार प्रत्यास्थ रहता है, अर्थात्, विरूपक बल (भार) को हटा देने पर यह अपनी मूल स्थिति में आ जाता है। विकृति का अधिकतम मान, जहां तक वस्तु (तार) में प्रत्यास्थ गुण रहता है, **प्रत्यास्थता सीमा** कहलाता है। प्रत्यास्थता सीमा के परे कोई भी वस्तु प्लास्टिक वस्तु जैसा व्यवहार करती है।

(iii) **बिन्दु** C : जब तार को सीमा B से अधिक खींचा जाता है तो विकृति अधिक तेजी से बढ़ती है और वस्तु प्लास्टिक (सुघट्य) हो जाती है। इसका अर्थ यह हुआ कि विरुपक बल हटाने के बाद भी तार अपनी मूलावस्था में नहीं आ पाएगा। भार को धीरे-धीरे कम करने पर वस्तु (तार) बिंदुकित पथ को अपनाती है। ऐसा चित्र में CD रेखा को देखकर

समझा जा सकता है। शून्य भार की स्थिति में तार में शेष विकृति को **स्थायी सेट** कहते हैं। बिंदु E के बाद तार का विस्तार ज्यों का त्यों बना रहता है। उसमें कोई कमी नहीं होती।

(iv) **विभंजन बिन्दु** F : बिन्दु E से आगे विकृति और तेजी से बढ़ती है और बिन्दु F के समीप तार की लंबाई, बल में वृद्धि के बिना भी लगातार होती है। इस बिन्दु पर तार टूट जाता है। इस बिंदु F को **विभंजन बिन्दु** या **विभंग बिंदु** कहते हैं।

विभंजन बिंदु F पर प्रतिबल को **विभंजन प्रतिबल** या **तनन क्षमता** कहते हैं। प्रत्यास्थ सीमा के अंदर एक वस्तु पर लगाया जा सकने वाला अधिकतम प्रतिबल कार्य प्रतिबल कहलाता है, और कार्य प्रतिबल तथा विभंजक प्रतिबल का अनुपात **सुरक्षा कारक** कहलाता है। ब्रिटेन में इसका मान 10 और अमेरिका में 5 लिया जाता है। हमने ब्रिटेन का मानदंड अपनाया है। यदि प्रत्यास्थता सीमा और विभंजन बिंदु के बीच विरूपण काफी अधिक हो जाता है तो पदार्थ **तन्य** कहलाता है। यदि पदार्थ प्रत्यास्थता सीमा को पार करते ही टूट जाता है तो वह **भंगुर** कहलाता है, जैसे काँच।

8.2.6 रबड़ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र

यदि आप रबड़ की डोरी को इसकी मूल लंबाई से कई गुना ज्यादा खींचे तो बल के हटाने पर यह अपनी मूल लंबाई पर आ जाती है। अर्थात, इसका प्रत्यास्थ क्षेत्र बड़ा है और इसमें सुपरिभाषित प्लास्टिक प्रवाह क्षेत्र (Plastse flow region) नहीं है। ऐसे पदार्थ जिनके विकृति के मान काफी बड़े होते हैं- इलैस्टोमर (Elastomer) अथवा प्रत्यास्थलक कहलाते है। यह गुण उनके आणविक विन्यास के कारण होता है। चित्र 8.10 में दो बातें मुख्य रूप से नोट करने लायक हैं। प्रथम, आप देख सकते हैं कि इस वक्र का कोई भी भाग विकृति के समानुपाती नहीं है। दूसरा, जब विरूपक बल धीरे-धीरे कम किया जाता है तो मूल वक्र पथ का अनुगमन नहीं होता है जबकि यह प्रतिदर्श (Sample) अंत में अपनी मूल लंबाई में आ जाता है। पदार्थ विरूपित अवस्था से मूल स्थिति में आने में कुछ कम कार्य करता है अर्थात, पदार्थ को विरूपित करने में किया गया कार्य अधिक होता है। इस प्रकार इस चक्र में कुछ ऊर्जा अवशोषित हो जाती है, जो ऊष्मा के रूप में प्रकट होती है। (इसे आप रबड़ को अपने होठों से छुआकर महसूस कर सकते हैं)। इस परिघटना को प्रत्यास्थ्य शैथिल्य (elastic hysteresis) कहते हैं।

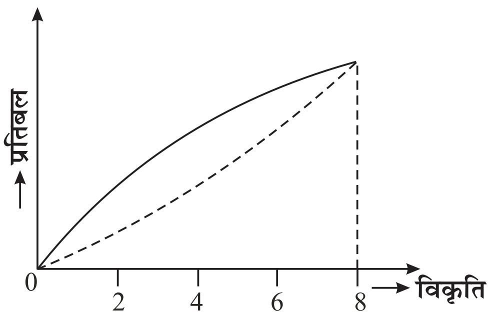


Fig. 8.10: रबड़ के लिए विकृति-प्रतिबल वक्र

प्रत्यास्थ शैथिल्य का प्रघात-अवशोषकों (Shock absorbes) में महत्वपूर्ण योगदान है। विरूपक बल द्वारा ऊर्जा का जो भाग स्थानान्तरित होता है, वह प्रघात-अवशोषक में संचित हो जाता है,

केवल एक छोटा भाग ही उस निकाय को संचरित होता है जो कि प्रघात अवशोषक से जुड़ा रहता है।

8.2.7. इस्पात रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ है

एक बड़ा विरूपक बल लगाने पर किसी वस्तु में यदि बहुत कम विकृति उत्पन्न होती है, तो वह वस्तु अधिक प्रत्यास्थ कहलाती है। यदि हम दो एक समान रबड़ और इस्पात के तार लें और दोनों में समान विरूपक बल का प्रयोग करें तो आप पाऐंगे कि इस्पात के तार में रबड़ के तार की अपेक्षा लंबाई में कम वृद्धि हुई है। लेकिन इस्पात के तार में व रबड़ के तार में समान विकृति पैदा करने के लिए इस्पात के तार में अधिक प्रतिबल लगेगा। इस्पात के विरूपण के लिए अत्यधिक प्रतिबल की आवश्यकता यह दर्शाती हे कि इस्पात में उत्पन्न आंतरिक प्रत्यानयन बल रबड़ की अपेक्षा अधिक है। अत: इस्पात रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ है।

उदाहरण 8.1 : एक मीटर लंबे तार के सिरे से 100 kg का भार लटकाया जाता है। यदि तार 0.20cm खिंचता है, तो (i) तनन प्रतिबल और (ii) तार में विकृति की गणना कीजिए $g = 9.80$ ms^{-2}.

हल :

$$\text{(i) तनन प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{(100\,\text{kg})\,(9.80\,\text{ms}^{-2})}{0.10\times10^{-4}\,\text{m}^2}$$

$$= 9.8 \text{ x } 10^7\,\text{Nm}^{-2}$$

$$\text{(ii) तनन विकृति} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{0.20\times10^{-2}\,\text{m}}{1.0\,\text{m}}$$

$$= 0.20 \times 10^{-2}$$

उदाहरण 8.2 : स्टील तार की अधिकतम लंबाई ज्ञात कीजिए जिसे टूटे बिना लटकाया जा सकता है, यदि भंजन प्रतिबल = 4.0 x 10^8 Nm^{-2}, घनत्व = 7.9 × 10^3 kg m^{-3} और $g = 9.80$ ms^{-2}

हल : तार का भार $W = A\ell\rho g$, जहाँ, A तार का अनुप्रस्थ परिच्छेद है, ρ तार का घनत्व, और ℓ अधिकतम लंबाई है। तार के अपने भार के कारण उत्पन्न प्रतिबल = $\frac{W}{A} = \rho l g =$ *भंजन प्रतिबल*

दिया गया है भंजन प्रतिबल = 4.0 x 10^8 Nm^{-2}. अत:

$$\ell = \frac{4.0\times10^8\,\text{Nm}^{-2}}{(7.9\times10^3\,\text{kg m}^{-3})\,(9.8\,\text{ms}^{-2})}$$

$$= 0.05 \times 10^5\,\text{m}$$

$$= 5 \times 10^3\,\text{m} = 5\,\text{km}.$$

अब आप एक विराम लेकर अपनी प्रगति की जाँच कर सकते हैं।

पाठगत प्रश्न 8.1

1. अंतर-आणविक बलों की प्रकृति किस प्रकार प्रभावित होगी यदि किसी वस्तु पर लगाया गया विरुपक बल (i) अंतर-आणविक पृथक्करण को बढ़ाता है। (ii) अंतर-आणविक पृथक्करण को घटाता है?
2. यदि किसी छड़ के एक सिरे को दृढ़तापूर्वक जकड़ दिया जाय और इसके दूसरे सिरे के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर लम्बवत बल लगाया जाए तो प्रतिबल एवं विकृति किस प्रकार की होगी?
3. धातु तार के कम विरूपण के लिए प्रतिबल/ विकृति का अनुपात स्थिर रहता है। जब विरूपण अधिक हो जाता है, तो बताइए कि यह अनुपात घटेगा या बढ़ेगा?
4. किन परिस्थितियों में प्रतिबल को भंजन प्रतिबल कहा जाता है?
5. यदि 4 kg द्रव्यमान को ऊर्ध्वाधर 4 m लम्बे व 0.64 mm व्यास के तार से लटकाने पर इसकी लंबाई में 0.60 mm की वृद्धि होती है, तो तनन प्रतिबल और विकृति ज्ञात करें।

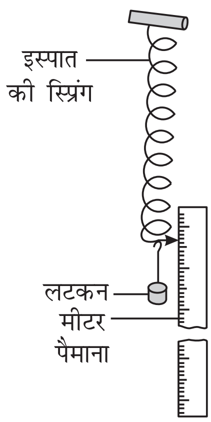
8.3 हुक का नियम

1678 में राबर्ट हुक ने कई ठोस पदार्थों के लिए प्रयोग करके विकृति और प्रतिबल वक्र प्राप्त किए और प्रत्यास्थता का नियम प्रतिपादित किया। उन्हीं के नाम पर इस नियम को हुक का नियम कहते हैं। इस नियमानुसार, प्रत्यास्थता सीमा में प्रतिबल विकृति के समानुपाती होता है।

$$\text{अर्थात, प्रतिबल } \alpha \text{ विकृति}$$

या
$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{स्थिराँक } (E) \qquad (8.2)$$

किसी पदार्थ की प्रत्यास्थता का मापक स्थिरांक समानुपातिकता E को **प्रत्यास्थता गुणांक** (modulus of elasticity) कहा जाता है। क्योंकि विकृति अविमीय राशि है, अतः प्रत्यास्थता गुणांक की विमा (या मात्रक) भी प्रतिबल की भांति ही हैं। इसका मान प्रतिबल तथा विकृति पर निर्भर नहीं करता, लेकिन यह वस्तु की प्रकृति पर निर्भर करता है। इसे देखने के लिए आप निम्नलिखित क्रियाकलाप कर सकते हैं।



चित्र. 8.11: हुक के नियम के लिए उपकरण

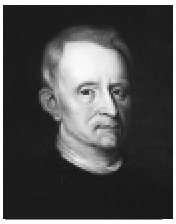
क्रियाकलाप 8.1

एक स्टील की स्प्रिंग लेकर इसका ऊपरी सिरा दीवार में लगे किसी दृढ अवलंब से स्थिर कर दीजिए और इसके किनारे पर एक मीटर स्केल लगा दीजिए (चित्र 8.11)। इसके निचले सिरे पर 100

ग्राम का एक भार लटका दें (100gm भार लगभग 1N बल के तुल्य होता है)। इस बल के कारण स्प्रिंग में हुई लम्बाई में वृद्धि को मापें। अब इस पर 100-100 ग्राम के क्रम में भार बढ़ाते जाए। प्रत्येक बार स्प्रिंग में हुई लम्बाई की वृद्धि को मापें। इस प्रकार 500 ग्राम तक भारों को बढ़ाने तक के प्रेक्षण लें। अब भार और लंबाई में वृद्धि का आरेखन करें। ग्राफ की आकृति कैसी है? क्या यह हुक के नियम का पालन करता है? ग्राफ एक सीधी रेखा होनी चाहिए। यह इंगित करता है कि भार तथा विस्तारण का अनुपात स्थिर है। इस क्रिया को रबड़ के तारों और अन्य पदार्थों के साथ दोहराइए।

आपको यह जानकारी होनी चाहिए कि हुक के नियम का पालन करने वाले पदार्थ स्प्रिंग तुलाओं या बल मापकों के रूप में प्रयुक्त होते हैं जैसा चित्र 8.11में दर्शाया गया है। आपने देखा होगा कि जब भी पलड़े में भार रखा जाता है, तो स्प्रिंग की लंबाई बढ़ती हैं। लंबाई में यह वृद्धि एक संकेतक द्वारा पैमाने पर दर्शाई जाती है और बल (भार) में वृद्धि मापन के लिए प्रयोग की जा सकती है।

रॉबर्ट हुक
(1635 – 1703)



सत्रहवीं शताब्दी के मेधावी प्रयोगकर्ता रॉबर्ट हुक, न्यूटन के समकालीन थे। उनकी विविध क्षेत्रों में रूचियाँ थीं और उन्होंने भौतिकी, खगोलिकी तकनीकी विज्ञान, जीव विज्ञान, भूविज्ञान, जीवाश्म विज्ञान, स्थापत्यकला और समुद्रयान तकनीकी के क्षेत्र में योगदान दिया। इसके अलावा उन्हें सर्वदिशी संधि, श्वसक का प्रारंभिक स्वरूप, आइरिस डायफ्राम, घंडियों के लिए संतुलक, स्प्रिंग व घड़ी का वह पुर्जा जो सबसे छोटे पहिए के एक दाँते को हटाता हुआ गति उत्पन्न करता है- बनाने का श्रेय जाता है। 1666 में लंदन ने लगी बड़ी आग के बाद प्रमुख सर्वेक्षक के रूप में इन्हें लंदन के पुनर्निर्माण का श्रेय जाता है। उन्होंने प्रत्यास्थता के नियम का प्रतिपादन किया और दहन का समुचित सिद्धांत दिया। इन्होंने मौसम संबंधी उपकरणों की खोज की और उनमें सुधार भी किया जैसे दाबमापी, पवन वेगमापी और आर्द्रतामापी)।

8.3.1 प्रत्यास्थता गुणाँक

पिछले खण्डों में आप पढ़ चुके हैं कि विकृति तीन प्रकार की होती है। अत: यह स्पष्ट है कि तीन विकृतियों के अनुरूप तीन प्रत्यास्थता-गुणांक होने चाहिए-रैखिक विकृति के लिए यंग का गुणांक आयतन विकृति के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक और अपरूपण विकृति के लिए अपरूपण गुणांक या दृढ़तांक (moodulus of rigidity)।

(i) **यंग का गुणांक:** अनुदैर्ध्य प्रतिबल और अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को वस्तु का यंग का गुणांक कहा जाता है। मान लीजिए लंबाई ℓ और अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल A वाले तार पर एक अनुदैर्ध्य बल लगाया जाता है। इस बल F के कारण तार खिंचता है।

मान लीजिए इसके फलस्वरूप तार की लंबाई में परिवर्तन ΔL हो जाता है।

तब,

$$\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल} = \frac{F}{A}$$

और

$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\Delta L}{L}$$

अत:

$$\text{यंग का गुणांक } Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F \times L}{A \times \Delta L}$$

यदि यह तार एक दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधर लटकाया जाए और एक द्रव्यमान M इसके एक सिरे पर लटकाया जाए तथा तार की त्रिज्या r हो तो, $A = \pi r^2$ और $F = M g$.

$$\therefore \qquad Y = \frac{M\,g\,L}{\pi r^2 \Delta L} \qquad (8.3)$$

Y के SI मात्रक हैं $N\,m^{-2}$। यंग के गुणांक का मान कुछ विशिष्ट द्रव्यमानों के लिए तालिका संख्या 8.1 में दिया गया है। इससे पता चलता है कि ताँबे की तुलना में इस्पात कहीं अधिक प्रत्यास्थ होता है।

सारणी 8.1 कुछ विशिष्ट द्रव्यमानों के लिए यंग का गुणांक

पदार्थ का नाम	$Y\ (10^9 Nm^{-2})$
एलुमीनियम	70
ताँबा	120
लोहा	190
इस्पात	200
काँच	65
अस्थि	9
पोलीस्ट्रीन	3

(ii) **आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक:** अभिलम्ब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को वस्तु का आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक कहते हैं।

यदि ΔP दाब वृद्धि के कारण वस्तु के आयतन V में, बिना आकार परिवर्तन के ΔV की कमी होती है, तो

$$\text{अभिलम्ब प्रतिबल} = \Delta P$$

$$\text{आयतन विकृति} = \Delta V/V$$

$$\text{आयतन प्रत्यास्थता गुणांक } B = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} = V\frac{\Delta P}{\Delta V} \qquad (8.4)$$

किसी वस्तु के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के व्युत्क्रम को संपीड्यता कहा जाता है। यदि संपीड्यता को k से दर्शाएँ तो

$$k = \frac{1}{B} = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} \qquad (8.5)$$

गैंसे सबसे अधिक संपीड्य और सबसे कम प्रत्यास्थ होती हैं, जबकि ठोस सबसे कम संपीड्य और सबसे अधिक प्रत्यास्थ होते हैं।

$$B_{\text{ठोस}} > B_{\text{द्रव}} > B_{\text{गैस}}$$

(iii) **दृढ़तांक या अपरूपण गुणांक:** अपरूपण प्रतिबल और अपरूपण विकृति के अनुपात को वस्तु के पदार्थ का दृढ़तांक या अपरूपण गुणांक कहा जाता है।

यदि स्पर्श रेखीय बल F क्षेत्र A पर कार्य करे और θ अपरूपण विकृति हो, तो

$$\text{दृढ़ताँक } \eta = \frac{\text{अपरूपण प्रतिबल}}{\text{अपरूपण प्रतिबल}} = \frac{F/A}{\theta} = \frac{F}{A\theta} \qquad (8.6)$$

आपको यह ज्ञात होना चाहिए कि ठोस एवं तरल दोनों के आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक होते हैं। लेकिन तरलों के लिए यंग गुणांक और विकृति गुणांक नहीं होते क्योंकि एक तरल तनन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल को सहन नहीं कर सकता है।

उदाहरण 8.3 : एक 0.1 cm^2 अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल वाली एक स्टील की तार की लंबाई को 50%. बढ़ाने के लिए आवश्यक बल की गणना करें। दिया है $Y = 2 \times 10^{11}$ N m^{-2}.

हल : तार की लंबाई में वृद्धि = 50%. यदि ΔL लंबाई में वृद्धि और L तार की सामान्य लंबाई हो तो

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad Y = \frac{F \times L}{A \times \Delta L}$$

या

$$F = \frac{Y \times A \times \Delta L}{L} = \frac{(2\times10^{11}\,\text{Nm}^{-2})\,(0.1\times10^{-4}\,\text{m}^2)\times1}{2}$$

$$= 0.1 \times 10^7 \text{ N} = 10^6 \text{ N}$$

उदाहरण 8.4 : जब एक ठोस रबड़ की गेंद को झील की सतह से उसके नीचे तल तक लाया जाता है तो इसके आयतन में 0.0012 %. की कमी होती है! झील की गहराई 360 m, है। झील जल का घनत्व 10^3 kgm^{-3} है और गुरुत्व जनित त्वरण 10 m s^{-2}. है। रबड़ का आयतन प्रत्यास्थ गुणांक निकालिए।

हल :

गेंद पर दाब की वृद्धि P $= h\rho g = 360\text{m} \times 10^3\,\text{kgm}^{-3} \times 10\ \text{ms}^{-3}$

$= 3.6 \times 10^6\ \text{Nm}^{-2}$

टिप्पणियाँ

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.0012}{100} = 1.2 \times 10^{-5}$$

$$\text{आयतन प्रत्यास्थ गुणांक } B = \frac{PV}{\Delta V} = \frac{3.6 \times 10^6}{1.2 \times 10^{-5}} = 3.0 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$$

8.3.2 प्वासों अनुपात (Poisson's Ratio)

आपने ध्यान दिया होगा कि जब एक रबड़ की ट्यूब को इसकी लंबाई की दिशा में खींचा जाता है तो इसके व्यास में संकुचन हो जाता है (चित्र 8.12)। यह तार के लिए भी सत्य है। हालांकि यह उतना स्पष्ट दृष्टिगोचर नहीं होता है। तार की लंबाई लगाए गए बल की दिशा में बढ़ती है। संकुचन इसमें लंब दिशा में होता है। प्रयुक्त बल के लंब दिशा की विकृति को **पार्श्व विकृति** कहते हैं। प्वासों ने दर्शाया कि प्रत्यास्थता सीमा के अंतर्गत पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति की समानुपाती होती है।

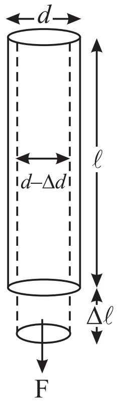


Fig: 8.12 : एक खिंची हुई रबड़ की ट्यूब

किसी वस्तु के पदार्थ के लिए पार्श्व विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात स्थिरांक होता है, इसे प्वासों अनुपात कहा जाता है और यह यूनानी अक्षर σ (सिग्मा) द्वारा दर्शाया जाता है। यदि α और β क्रमश: अनुदैर्ध्य और पार्श्व विकृतियाँ हो तो प्वासों अनुपात

$\sigma = \beta / \alpha$.

यदि ℓ लंबाई और d व्यास के तार (दंड या नली) पर तनन बल के लगाने से उसकी लंबाई में $\Delta\ell$ की वृद्धि और व्यास में Δd, की कमी हो जाए तो

$$\text{रैखिक विकृति} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$\text{पार्श्व विकृति} \qquad \beta = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\text{प्वासों अनुपात} \quad \sigma = \frac{\Delta d/d}{\Delta\ell/\ell} = \frac{\ell}{d}\,\frac{\Delta d}{\Delta\ell} \qquad (8.7)$$

चूंकि प्वासों अनुपात दो विकृतियों का अनुपात है, यह विमाहीन राशि है और एक शुद्ध संख्या है।

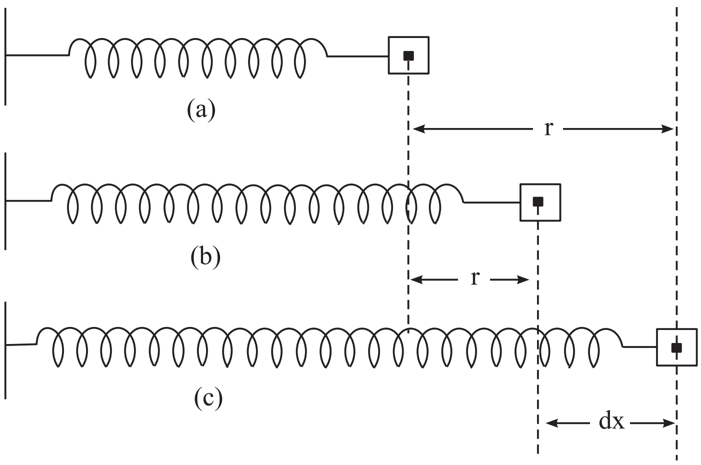
प्वासों अनुपात का मान केवल द्रव्य की प्रकृति पर निर्भर करता है और अधिकांश पदार्थों के लिए यह 0.2 और 0.4 के बीच रहता है। जब किसी वस्तु पर दाब डालने से उसके आयतन में परिवर्तन नहीं होता, अर्थात् वस्तु पूर्णतया असंपीड्य होती है, तो प्वासों अनुपात का मान अधिकतम होता है अर्थात् 0.5। सैद्धान्तिक रूप से प्वासों अनुपात का मान –1.0 और 0.5 के बीच होता है।

8.3.3 प्रत्यास्थ ऊर्जा

जब किसी स्प्रिंग को दबाया या खींचा जाता है, तो इसका विन्यास बदल जाता है और इसमें कार्य करने की क्षमता आ जाती है।

प्रत्यास्थ ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा का एक प्रकार है जो स्प्रिंग जैसी प्रत्यास्थ वस्तुओं के संपीडन या विस्तार से संबंधित है। यहां पर संबद्ध बल स्प्रिंग बल है। यदि हम किसी स्प्रिंग को दबायें या खींचे तो स्प्रिंग के फेरों की सापेक्ष स्थिति परिवर्तित होती है। रबड़ ट्यूब के प्रकरण में विभिन्न परतों की सापेक्ष स्थिति परिवर्तित होती है। एक प्रत्यानयन बल इस परिवर्तन का विरोध करता है जिसके परिणाम स्वरूप हमारे द्वारा किया गया कार्य स्प्रिंग अथवा इसी प्रकार की वस्तुओं की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि कर देता है।

मान लीजिए किसी स्प्रिंग का स्प्रिंग-नियतांक k है। किसी क्षण यदि स्प्रिंग को x दूरी तक खींचा जाता है तो आरोपित बल $F = kx$ होगा। (चित्र 8.3.3)



चित्र 8.3.3

यदि स्प्रिंग को पुनः dx दूरी तक खींचा जाता है (चित्र 8.3.3c) तो किए गए अल्प कार्य को नीचे दिए गए अनुसार लिखा जा सकता है:

$$dW = kx.dx$$

इसीलिए, स्प्रिंग को साम्यावस्था से r दूरी तक खींचने में किया गया कुल कार्य (चित्र 8.3.3) होगा:

$$W = \int_0^r kxdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r = \frac{1}{2}kr^2$$

अतः प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा,

$$U = \frac{1}{2}kr^2$$

क्रियाकलाप 8.2

दो समान तार लें। किसी एक तार को थोडा सा मरोड कर इसमें थोड़ी देर के लिए ऐंठन वाले कंपन पैदा करें। कुछ समय पश्चात दूसरे तार में भी इसी प्रकार के कंपन पैदा करें। दोनों तारों के कंपनों की क्षय दर का अवलोकन करें।

आप पाएँगे कि लम्बे समय से कंपन कर रहे तार के कंपन अधिक जल्दी क्षय हो जाते हैं। तार में एक श्रांति उत्पन्न हो जाती है और इसमें कंपनों का बने रहना मुश्किल हो जाता है। इस घटना को **प्रत्यास्थ श्रांति** कहते है।

प्रत्यास्थता के विषय में कुछ और तथ्य :

1. यदि हम कुछ उपयुक्त प्रकार की अशुद्धियाँ धातुओं में मिलाएं तो उनके प्रत्यास्थ गुणों में परिवर्तन होता है उदाहरण के लिए, यदि लोहे में कार्बन या सोने में पोटैशियम मिला दिया जाए, तो इससे लोहे या सोने की प्रत्यास्थता बढ़ जाती है।
2. ताप के बढ़ने से पदार्थों की प्रत्यास्थता घटती है। उदाहरण के तौर पर, कार्बन सामान्य ताप पर अत्यधिक प्रत्यास्थ है। जब इसमें विद्युतधारा प्रवाहित करके इसे गरम किया जाता है तो यह सुघट्य बन जाता है। इसी प्रकार प्लास्टिक को द्रव हवा में ठंडा करने पर यह अत्यधिक प्रत्यास्थ हो जाता है।
3. प्रत्यास्थता गुणांक प्रतिबल या विकृति पर निर्भर नहीं करता। यह केवल वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

उदाहरण 8.5: एक 20 cm भुजा वाले धातु के घन पर एक $10^4\,\text{Nm}^{-2}$ परिमाण का अपरूपक बल लगाया जाता है। यदि घन का ऊपरी हिस्सा निचले हिस्से की तुलना में 0.01 cm विस्थापित होता है तो दृढ़तांक ज्ञात कीजिए।

हल : अपरूपक प्रतिबल $= 10^4\,\text{Nm}^{-2}$ दिया गया है $\Delta x = 0.01$ cm,

और $y = 20$ cm

$\therefore$ अपरूपक विकृति $= \dfrac{\Delta x}{y} = \dfrac{0.01\,\text{cm}}{20\,\text{cm}}$

अत: $= 0.005$

$$\text{दृढ़तांक}\ \eta = \frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपक विकृति}} = \frac{10^4\,\text{Nm}^{-2}}{.0005}$$

$$= 2 \times 10^7\ \text{N m}^{-2}$$

टिप्पणियाँ

उदाहरण 8.6 : 10 kg द्रव्यमान को 5 m लंबे और 1 mm व्यास के ताँबे के तार के सिरे से लटकाया जाता है। लंबाई में वृद्धि एवं पार्श्व विकृति की गणना करें। यदि प्वासों अनुपात 0.25. व यंग गुणांक $Y = 11 \times 10^{10}$ N m^{-2}.

हल : यहाँ $L = 5$ m, $r = 0.05 \times 10^{-3}$ m, $y = 11 \times 10^{10}$ Nm^{-2} $F = 10 \times 9.8$ N, और

$$\sigma = 0.25.$$

तार में उत्पन्न विस्तारण

$$\Delta \ell = \frac{F.\ell}{\pi r^2 Y} = \frac{(10\,\text{kg}) \times (9.8\text{ms}^{-2}) \times (5\text{m})}{3.14\,(0.5 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 \times (11 \times 10^{10}\,\text{Nm}^{-2})}$$

$$= \frac{490}{8.63 \times 10^4}\ \text{m}$$

$$= 5.6 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

अनुदैर्ध्य विकृति $= \alpha = \dfrac{\Delta \ell}{\ell}$

$$= \frac{5.6 \times 10^{-3}\, m}{5\,\text{m}}$$

$$= 1.12 \times 10^{-2}$$

प्वासों अनुपात (σ) = पार्श्व विकृति(β) / अनुदैर्ध्य विकृति(α)

$\therefore$ पार्श्व विकृति $\beta = \sigma \times \alpha$

$$= 0.125 \times 1.12 \times 10^{-2}$$

$$= 0.14 \times 10^{-3}.$$

अब आप एक विराम लें और अपनी प्रगति की जाँच करें।

पाठगत प्रश्न 8.2

1. क्या अनुदैर्ध्य प्रतिबल और यंग-गुणांक के मात्रक एक ही हैं? अपने उत्तर को कारण सहित स्पष्ट करें।
2. ठोस पदार्थ द्रवों एवं गैसों से अधिक प्रत्यास्थ हैं। इसका औचित्य सिद्ध कीजिए।
3. एक तार की लम्बाई काट कर आधी कर दी जाती है। एक दिए गए भार द्वारा इसकी लंबाई में वृद्धि किस प्रकार प्रभावित होगी?

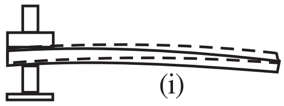
टिप्पणियाँ

4. दो तार एक ही धातु के बने हैं। पहले तार की लंबाई दूसरे तार की आधी है और इसका व्यास पहले तार से दो गुना है। यदि दोनों तारों पर समान भार लटकाए जाएं तो उनकी लंबाई में वृद्धियों का अनुपात क्या होगा?

5. एक तार पर $1\times10^{8}\,\text{N m}^{-2}$ का प्रतिबल लगाने पर इसकी लंबाई में 10^{-3} गुना वृद्धि होती है। तार के पदार्थ के यंग गुणांक की गणना कीजिए।

6. $100\,\text{N m}^{-1}$ स्प्रिंग नियतांक के किसी स्प्रिंग को 10 cm की दूरी तक खींचने पर इसमें भंडारित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का परिकलन कीजिए।

वस्तुओं के प्रत्यास्थ व्यवहार के उपयोग


(i)

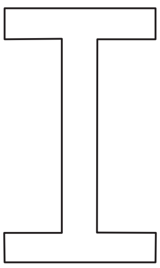
वस्तुओं के प्रत्यास्थ व्यवहार की हमारे दैनिक जीवन में एक महत्वपूर्ण भूमिका है। दंड एवं स्तंभ हमारे वास्तुकला संबंधी ढाँचों के महत्वपूर्ण हिस्से हैं। एक सामांगी छड़ जिसका एक सिरा क्षैतिज रूप में जकड़ा रहता है और जिसके दूसरे सिरे पर भार लटका रहता है कैन्टीलीवर कहलाती है। (चित्र i) ऋषिकेश में लक्ष्मण झूले का निलंबी सेतु और कोलकता का विद्यासागर सेतु कैन्टीलीवर के आधारों पर स्थित हैं।

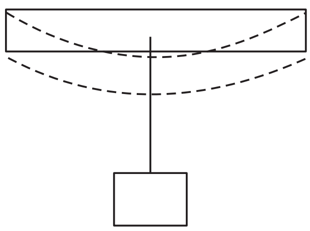
एक कैन्टीलीवर जिसकी लंबाई l चौड़ाई b और मोटाई d हो और इसके मुक्त सिरे पर M द्रव्यमान हो तो कैन्टीलीवर का अवनमन (δ) इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\delta = \frac{4M\,g\,\ell^3}{\gamma\,b\,d^3}$$

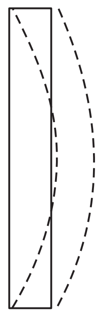
अब यह सरलता से समझ में आ सकता है कि गर्डर्स तथा रेल पटरियों का अनुप्रस्थ परिच्छेद I-आकृति का क्यों रखा जाता है (चित्र ii)। दूसरे घटक समान रहने पर $\delta \,\alpha\, d^{-3}$। अतः मोटाई बढ़ाने से, हम समान भार के लिए अवनमन अधिक प्रभावशाली ढंग से कम कर सकते हैं। इससे पदार्थ की काफी बचत होती है और बीम की शक्ति में कोई कमी नहीं आती, जबकि बीम दोनों ओर से कसी हो और इसमें बीच में भार लगा हो (चित्र iii), मध्य बिंदु का अवनमन होगा

$$\delta = \frac{M\,g\,\ell^3}{4\,b\,d^3\gamma}$$


(ii)


(iii)

अत: एक दिए गए भार के लिए, हम ऐसे पदार्थ का चयन करेंगे जिसका यंग गुणाँक Y अधिक हो और मोटाई अधिक हो ताकि δ का मान कम रखा जा सके। तथापि, एक गहरी बीम में ऐंठने की प्रवृत्ति हो सकती है (चित्र iv)। इसे टालने के लिए, एक बड़ा भार वहन करने वाली सतह बनाई जाती है। I-आकृति के अनुप्रस्थ परिच्छेद में ये दोनों आवश्यकताएँ पूरी हो जाती हैं।



(iv)

क्रेनों में, हम भारी समानों को एक स्थान से हटाकर दूसरे स्थान पर ले जाने के लिए मोटी धात्विक रज्जु का प्रयोग करते हैं। 300 मेगा पास्कल पराभव क्षमता (yield strength) की स्टील की रज्जु से दस मीट्रिक टन के भार को उठाने के लिए स्टील रज्जु का अनुप्रस्थ परिच्छेद की त्रिज्या कम से कम 10 cm होनी चाहिए। इतनी त्रिज्या का अकेला तार एक दृढ़ छड़ के समान व्यवहार करेगा। इसलिए इन रज्जुओं को बहुत से पतले तारों को गुंफित करके बनाया जाता है। इसे बनाने में आसानी होती है, ऐसी रज्जु अधिक लचीली और शक्तिशाली होती है।

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी पर एक पर्वत की अधिकतम ऊँचाई लगभग 10 km हो सकती है; अन्यथा इसके भार के कारण इसके नीचे की चट्टाने विरूपित हो जाएँगी।

आपने क्या सीखा

- वस्तु में अवरूपण उत्पन्न करने वाला बल विरूपक बल कहलाता है।
- वस्तु में विरूपण होने पर उसमें आतंरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है। विरूपक बल हटा लेने पर वस्तु अपनी मूल आकृति और आमाप (size) में वापस आ जाती है।
- विरूपण बल के हटने पर वस्तु के उस गुण को जिससे उसका मूल स्वरूप तथा आमाप बना रहता है, प्रत्यास्थता कहते हैं।
- विरूपक बल को हटा लेने के बाद जो वस्तु पूर्ण रूप से अपने मूल आमाप और रूप में लौट आती है, उसे पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु कहा जाता है।
- यदि वस्तु पूर्ण रूप से अपना परिवर्तित रुप बनाए रखे तो वह पूर्ण सुघट्य पदार्थ की बनी (प्लास्टिक) कही जाती है।
- प्रतिबल, आंतरिक प्रत्यानयन बल के प्रति इकाई क्षेत्रफल के बराबर होता है। इसका मात्रक Nm^{-2} है।
- विकृति, विमा में प्रति इकाई विमा परिवर्तन (जैसे लंबाई, आयतन या आकृति) के बराबर होती है। विकृति का कोई मात्रक नहीं है।
- सामान्य अवस्था में किसी परमाणु पर सकल अंतरापरमाणु बल शून्य होता है। यदि परमाणुओं के बीच पार्थक्य दूरी समान अवस्था की पार्थक्य दूरी से अधिक होती है तो अंतरापरमाणु बल आकर्षी होते हैं। यदि पार्थक्य कम हो तो बल प्रतिकर्षी होते हैं।
- प्रतिबल का वह अधिकतम मान जहाँ तक वस्तु के प्रत्यास्थ गुण विद्यमान रहते हैं, प्रत्यास्थ सीमा कहलाता है। प्रत्यास्थ सीमा के परे वस्तु का व्यवहार सुघट्य (प्लास्टिक) वस्तु की तरह हो जाता है।

टिप्पणियाँ

- हुक का नियम बताता है कि प्रत्यास्थता की सीमा में, वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल विकृति के समानुपाती होता है।
- यंग गुणांक अनुदैर्ध्य प्रतिबल और अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात होता है।
- आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक, अभिलंब प्रतिबल और आयतन विकृति का अनुपात होता है।
- पार्श्व विकृति और अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को प्वासों अनुपात कहा जाता है।
- किसी स्प्रिंग को खींचने में किया गया कार्य उसमें प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में भंडारित हो जाता है।

पाठांत प्रश्न

1. प्रत्यास्थता की परिभाषा दीजिए। प्रत्यास्थ एवं सुघट्य वस्तुओं के उदाहरण भी दें।
2. प्रतिबल, विकृति एवं हुक के नियम की व्याख्या करें।
3. अंतरा-आणविक बलों की सहायता से द्रव्य के प्रत्यास्थ गुणों की व्याख्या कीजिए।
4. यंग गुणाँक, आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक और दृढ़तांक को परिभाषित करें।
5. प्रतिबल विकृति ग्राफ की सहायता से बढ़ते भार के साथ धात्विक तार के व्यवहार की व्याख्या करें।
6. स्टील, रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ क्यों होता है?
7. प्वासों अनुपात का कोई मात्रक क्यों नहीं होता है?
8. द्रव्य की तीन अवस्थाओं अर्थात ठोस, द्रव और गैस में कौन सबसे अधिक प्रत्यास्थ होता है और क्यों?
9. 4 m लंबे और 1mm व्यास वाले धातु का तार 4 kg भार द्वारा खींचा जाता है। उत्पन्न अनुदैर्ध्य वृद्धि (लंबाई में वृद्धि) ज्ञात कीजिए। यदि तार के पदार्थ के लिए Y, $13.78 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}$.हो।
10. एक गोले का आयतन उसे समुद्र में 1 km नीचे, गहराई में ले जाने में 0.02% कम हो जाता है। गोले के पदार्थ का आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक ज्ञात करें। आप समुद्र के जल का घनत्व $1000\ \text{kg m}^{-3}$ and $g = 9.8\text{m s}^{-2}$ मान सकते हैं।
11. एक 0.2 mm. त्रिज्या वाले तार की लंबाई में 0.2% की वृद्धि करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी? यदि $Y = 9 \times 10^{10}\ \text{N m}^{-2}$.
12. अवरूपण प्रतिबल, अवरूपण विकृति और दृढ़ताँक क्या हैं?
13. 10 cm भुजा वाले घन की ऊपरी सतह पर जब 5×10^5 N स्पर्शीय बल लगाया जाता है, तब उसकी ऊपरी सतह 2 mm समान्तर रूप में हट जाती है, जबकि नीचे की सतह को स्थिर रखा जाता है। विकृति की गणना कीजिए।
14. प्रत्यास्थता के गुण का हमारे जीवन में बहुत महत्व है। सुघट्यता हमारी सहायता कैसी करती है?

15. L लंबाई और r त्रिज्या के तार का एक सिरा क्लैम्स से जुड़ा है। जब इसके मुक्त सिरे पर F बल लगाकर इसे खींचा जाता है, तब इसकी लंबाई में x वृद्धि हो जाती है। उसी पदार्थ के एक दूसरे तार, जिसकी लंबाई $2L$ है, पर $2F$ बल लगाया जाता है। बताइए इस दूसरे तार की लंबाई में कितनी वृद्धि होगी?

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

8.1

1. यदि $R > R_0$, बल आकर्षक प्रकृति का और यदि $R < R_0$ तो विकर्षक (प्रतिकर्षी) प्रकृति का होगा।
2. अनुदैर्ध्य प्रतिबल और रेखीय विकृति (अनुदैर्ध्य विकृति)
3. अनुपात कम होगा।
4. विभंजन बिंदु के संगत प्रतिबल को भंजन प्रतिबल कहते हैं।
5. 0.12×10^{10} N m^{-2}.

8.2

1. दोनों के मात्रक एक ही हैं, क्योंकि विकृति का कोई मात्रक नहीं है।
2. क्योंकि द्रवों व गैसें की संपीड्यता ठोस पदार्थों की अपेक्षा अधिक है और आयतन प्रत्यास्थ गुणांक संपीड्यता का व्युत्क्रमानुपाती होता है। इसलिए ठोस द्रवों एवं गैसों की अपेक्षा अधि क प्रत्यास्थ है।
3. आधा
4. 1 : 8
5. 1×10^{11} N m^{-2}.
6. 1 J

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

9. 0.15 m.

10. 4.9×10^{-10} N m^{-2}

11. 22.7 N

13. 2×10^{-2}

15. x.