



318hi08

8

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

# केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

पूर्व अध्याय में हमने कच्चे समकों के उपयोगी ढंग से एकत्रीकरण, वर्गीकरण तथा सारणीयन का अध्ययन किया। फिर भी व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए यह पर्याप्त नहीं है; समकों के पुनः संक्षिप्तीकरण की आवश्यकता है, विशेषकर, जब हम दो या अधिक विभिन्न वितरणों की तुलना करना चाहते हैं। हम समस्त वितरण को केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का प्रयोग करके, एक ऐसी संख्या में परिणति कर देते हैं, जो उस वितरण का प्रतिनिधित्व कर सके।



### उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद आप:

- केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की अवधारणा तथा औसत की व्याख्या कर पाएंगे;
- अंकगणितीय माध्य, संयुक्त अंकगणितीय माध्य तक भारित अंकगणितीय माध्य आदि की गणना कर पाएंगे;
- माध्यिका और चतुर्थकों की गणना कर पाएंगे;
- बहुलक की गणना कर पाएंगे;
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों की तुलना कर पाएंगे; तथा
- विभिन्न व्यापारिक समस्याओं के समाधान में इनको लागू कर पाएंगे।

### 8.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ

केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप वह सांख्यिकीय माप है, जो एक अकेले मूल्य का ज्ञान कराता है, जो समस्त श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। इसका उद्देश्य समस्त समकों का एक सही विवरण प्रदान करना है। यह एक अकेला मूल्य समकों का सर्वाधिक प्रतिरूपी/ प्रतिनिधि होता है, क्योंकि ऐसे प्रतिरूपी मूल्य किन्हीं अवलोकनों के समूह के मध्य होने की प्रवृत्ति रखते हैं, इन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कहते हैं।



टिप्पणियाँ

दूसरे शब्दों में केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप समकों के मूल्यों को इस प्रकार संक्षिप्त कर देता है कि वह एक मात्र मूल्य ही समूची श्रेणी का प्रतिनिधित्व कर सके। उदाहरणार्थ, एक भारतीय की औसत आय, औसत वर्षा, औसत उत्पादन, औसत मूल्य इत्यादि।

## 8.2 औसत के प्रकार अथवा केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप

औसत के मुख्य प्रकार निम्नलिखित हैं—

- अंकगणितीय माध्य
  - सरल/ अंकगणितीय माध्य
  - भारित अंकगणितीय माध्य
- माध्यिका
- चतुर्थक
- बहुलक

प्रथम को 'गणितीय औसत' कहा जाता है, जबकि अन्य तीनों को स्थिति के माप अथवा स्थिति संबंधी औसत का नाम दिया जाता है।

### 8.2.1 अंकगणितीय माध्य

अंकगणितीय माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे अधिक उपयोग में आने वाला माप है। यह श्रृंखला के सभी मदों का एक औसत है। माध्य वह संख्या है, जो किसी श्रृंखला के सभी पदों के मूल्यों के योग को उनकी कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होती है।

#### 8.2.1.1 व्यक्तिगत श्रृंखला में अंकगणितीय माध्य की गणना

व्यक्तिगत श्रृंखला में अंकगणितीय माध्य निम्न विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

- प्रत्यक्ष विधि
- कल्पित माध्य विधि

#### प्रत्यक्ष विधि

अगर N मदें हैं, जैसे  $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$  तो प्रत्यक्ष विधि का उपयोग करते हुए व्यक्तिगत श्रृंखला में अंकगणितीय माध्य, जिसे सामान्यतः  $\bar{X}$  से संबोधित करते हैं और X बार के रूप में पढ़ा जाता है। इसका सूत्र निम्न प्रकार है—

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

यहां  $\Sigma X =$  मर्दों के योग को प्रगट कर रहा है और  $N$ , मर्दों की संख्या को।

**उदाहरण 1 :** किसी विशेष परीक्षा में कक्षा 11 के सात विद्यार्थियों के प्राप्तांक इस प्रकार हैं—5, 11, 16, 17, 19, 24, 30। उनका अंकगणितीय माध्य बताइए।

**हल :** प्राप्तांकों का अंकगणितीय माध्य

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\Sigma X}{N} \\ &= \frac{5+11+16+17+19+24+30}{7} \\ &= \frac{122}{7} = 17.4 \text{ अंक}\end{aligned}$$

औसत अंक = 17.43

### कल्पित माध्य विधि

कल्पित माध्य विधि को लघु विधि (Short-cut Method) भी कहा जाता है। इस विधि का प्रयोग प्रायः मर्दों की संख्या अधिक और/ अथवा अंकों के अंशों में होने पर किया जाता है। यह गणना को सरल करने में सहायता करता है। इस विधि में कुछ तर्क और अनुभव के आधार पर एक विशेष मूल्य को समांतर माध्य के रूप में मान लिया जाता है। इस माध्य से सभी मूल्यों के विचलन लिए जाते हैं। कल्पित माध्य के आधार पर ज्ञात किए गए विचलनों का योग किया जाता है और इस योग को मर्दों की संख्या से विभाजित कर दिया जाता है। वास्तविक अंकगणितीय माध्य की गणना में निम्न सूत्र प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

यहां  $\bar{X}$  = अंकगणितीय माध्य,  $A$  = कल्पित माध्य,  $\Sigma d = \Sigma(X - A)$

$\Sigma d$  = विचलनों का योग,  $N$  = मर्दों का योग

**टिप्पणी :** यह आवश्यक नहीं है कि कल्पित माध्य ( $A$ ) दी हुई श्रेणी में से ही किसी मूल्य को मानें, कल्पित माध्य के रूप में किन्हीं अन्य मूल्यों को भी लिया जा सकता है। लेकिन अंतिम उत्तर समान ही होगा।

**उदाहरण 2 :** एक फर्म के वर्ष 2013-2014 के निर्यात के आंकड़े निम्नलिखित हैं—

फर्म	1	2	3	4	5	6	7	8	9
निर्यात मूल्य (करोड़ रु. में)	10	20	30	40	50	60	70	80	90



टिप्पणियाँ



टिप्पणियाँ

कल्पित माध्य द्वारा इन फर्मों के निर्यात का औसत मूल्य ज्ञात करो-

हल :

तालिका 8.1: कल्पित माध्य द्वारा अंकगणितीय माध्य की गणना

फर्म	निर्यात(X) (करोड़ रुपये में)	कल्पित माध्य से विचलन (A=60); d=(X-60)
1	10	-50
2	20	-40
3	30	-30
4	40	-20
5	50	-10
6	60	0
7	70	10
8	80	20
9	90	30
<b>N = 9</b>	<b>ΣX = 450</b>	<b>Σd = -90</b>

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 60 + \frac{(-90)}{9} = 50 \text{ करोड़ रुपये}$$



**पाठगत प्रश्न 8.1**

- एक शोधार्थी ने निम्नलिखित व्यक्तिगत आंकड़े इस प्रकार एकत्र किए हैं—  
5, 12, 6, 8, 5, 6, 7, 5, 12, 4  
आंकड़ों का अंकगणितीय माध्य है।  
(क) 5      (ख) 6      (ग) 7      (घ) 8
- नीचे दी गई संख्याओं का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए—  
3, 4, -1, 22, 14, 0, 9, 18, 7, 0, 1

**8.2.1.2 समूहबद्ध आंकड़ों ( Grouped Data ) का अंकगणितीय माध्य ज्ञात करना**

**खंडित श्रेणी**

खंडित आवृत्ति श्रृंखला में मदों के मूल्यों  $x_1, x_2, \dots, x_N$  के साथ उनकी आवृत्तियां  $f_1, f_2, \dots, f_N$  भी दी जाती है। इस श्रृंखला की समांतर माध्य गणना में निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है—

- (i) प्रत्यक्ष विधि
- (ii) कल्पित माध्य विधि
- (iii) पद विचलन विधि

**(i) प्रत्यक्ष विधि**

इस विधि में अंकगणितीय माध्य निम्न सूत्र का प्रयोग कर प्राप्त किया जाता है।

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \dots + f_NX_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

यहां  $\sum f$  = कुल आवृत्तियां

**उदाहरण 3 :** नीचे एक कारखाने के 20 कामगारों के साप्ताहिक मजदूरी के आंकड़े दिए जा रहे हैं—

साप्ताहिक आय (रु. में)	100	140	170	200	250
कामगारों की संख्या	5	2	6	4	3

कामगारों की साप्ताहिक आय के औसत की गणना कीजिए—

**हल :**

**तालिका 8.2: अंकगणितीय माध्य की गणना**

साप्ताहिक मजदूरी(X)	मजदूरों की संख्या(f)	fX	(A=170); d=X-170	fd
100	5	500	-70	-350
140	2	280	-30	-60
170	6	1020	0	0
200	4	800	30	120
250	3	750	80	240
	<b><math>\Sigma f=20</math></b>	<b><math>\Sigma fX=3350</math></b>		<b><math>\Sigma fd=-50</math></b>

प्रत्यक्ष विधि द्वारा अंकगणितीय माध्य औसत साप्ताहिक मजदूरी :

$$\text{सूत्र} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \bar{X} = \frac{3350}{20} = 167.50$$

(ii) कल्पित माध्य द्वारा : चूंकि खंडित श्रेणी में प्रत्येक मद की आवृत्तियां (F) दी गई होती है। कल्पित माध्य से विचलन किया जाता है, जिसे आवृत्तियों से गुणा कर योग कर लिया जाता है। निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

यहां A = कल्पित माध्य, d = X - A और N =  $\sum f$



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

ऊपरोक्त उदाहरण में कल्पित माध्य से औसत साप्ताहिक आय है—

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 170 + \frac{-50}{20} = \text{Rs.}167.50$$

(iii) पद-विचलन विधि : इस विधि में अनुमानित माध्य से विचलन (d) लेकर उसे समान गुणक (Common Factor) 'c' से विभाजित किया जाता है। इससे गणना सरल हो जाती है।

यहां हम अनुमान लगाते हैं, ताकि संख्याओं का आकार छोटा हो जाए और गणना में आसानी हो जाए।

$$d' = \frac{d}{c} = \frac{X - A}{c}$$

अंकगणितीय माध्य को निम्न सूत्र का प्रयोग करके परिगणित किया जाता है—

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c$$

**उदाहरण 4 :** कक्षा के 60 छात्रों के प्राप्तांक निम्न प्रकार हैं—

अंक	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	8	12	20	10	6	4

- (i) प्रत्यक्ष विधि
- (ii) कल्पित माध्य विधि
- (iii) पद विचलन विधि

द्वारा समांतर माध्य की गणना कीजिए

**हल :**

**तालिका 8.3: अंकगणितीय माध्य की गणना**

अंक (X)	छात्र संख्या (f)	fX	d = (X - 40)	d' = d/10	fd	fd'
20	8	160	-20	-2	-160	-16
30	12	360	-10	-1	-120	-12
40	20	800	0	0	0	0
50	10	500	10	1	100	10
60	6	360	20	2	120	12
70	4	280	30	3	120	12
	<b>Σf = 60</b>	<b>ΣfX = 2,460</b>			<b>Σfd = 60</b>	<b>Σfd' = 6</b>

(i) प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{2460}{60} = 41$$

इस प्रकार औसत अंक = 41

(ii) कल्पित माध्य विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 40 + \frac{60}{60} = 40 + 1 = 41$$

इस प्रकार औसत अंक = 41

(iii) पद विचलन विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c = 40 + \frac{6}{60} \times 10 = 41$$

इस प्रकार औसत अंक = 41

**उदाहरण 5 :** यदि औसत मजदूरी रुपये 115.86 है तो छूटी हुई मद का पता लगाइए।

<b>Wages in (₹):</b>	110	112	113	117	?	125	128	130
<b>No. of workers :</b>	25	17	13	15	14	8	6	2

हल:

तालिका 8.4 : छूटी हुई मद की गणना

मजदूरी रुपये में $X_i$	मजदूरी की संख्या $f_i$	$f_i X_i$
110	25	2750
112	17	1904
113	13	1469
117	15	1755
x	14	14x
125	8	1000
128	6	768
130	2	260
कुल	$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma f_i X_i = 9906 + 14x$



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

$$\text{अब अंकगणितीय माध्य} = (\bar{X}) = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

$$\text{इसलिए } 115.86 = \frac{9906 + 14x}{100}$$

$$\text{या } 115.86 \times 100 = 9906 + 14x$$

$$11586 = 9906 + 14x$$

$$11586 - 9906 = 14x$$

$$1680 = 14x$$

$$\text{या } x = \frac{1680}{14}$$

$$x = 120$$

अतः छूटी हुई मद है = ₹ 120



### पाठगत प्रश्न 8.2

1. नीचे की उम्र तालिका सैट से माध्य ज्ञात कीजिए—

आयु (वर्षों में)	आवृत्तियाँ
10	0
11	8
12	3
13	2
14	7

2. पद विचलन विधि द्वारा उदाहरण नं. 3 में दी गई औसत साप्ताहिक आय का अंकगणितीय माध्य निकालिए।

#### 8.2.1.3 अखंडित अथवा अविच्छिन्न श्रेणी में समांतर माध्य निकालना

अखंडित श्रेणी में वर्गांतर (C) तथा आवृत्तियाँ दी गई होती हैं। वर्गों का मध्य बिंदु ज्ञात करके गणितीय माध्य की गणना की जाती है। यह ध्यान रखना चाहिए कि इसमें वर्ग- अंतराल समावेशी (inclusive), असमावेशी (Exclusive) अथवा असमान आकार के हो सकते हैं। अखंडित श्रेणी में समांतर माध्य ज्ञात करने हेतु निम्न विधियों को प्रयुक्त किया जाता है—



- (i) प्रत्यक्ष विधि
- (ii) अनुमानित माध्य विधि
- (iii) पद विचलन विधि

**(i) प्रत्यक्ष विधि :** इस विधि से गणितीय माध्य की गणना हेतु निम्न चरणों से गुजरना पड़ता है—

1. निम्नलिखित सूत्र से प्रत्येक वर्ग का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए और (m) की तरह लिखिए जैसा नीचे दिया है—

$$\text{मध्य बिंदु (m)} = \frac{\text{निम्न सीमा} + \text{उच्च सीमा}}{2}$$

2. प्रत्येक मध्य बिंदु को उसके सामने वाली आवृत्ति से गुणा कीजिए और इन्हें fm की तरह लिखिए।
3. अंक गणितीय माध्य इस प्रकार प्राप्त किया जाता है—

$$\bar{X} = \frac{\sum fm}{\sum f}$$

**(ii) अनुमानित माध्य विधि :** इस विधि में माध्य की गणना का सूत्र इस प्रकार है—

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

इसमें A = अनुमानित माध्य d = m - a

f. = प्रेक्षण (Observation) इकाई की बारंबारता

(iii) पद विचलन विधि : इस विधि को सरलता प्रदान करने के लिए हमें सर्वप्रथम एक समान मूलक संख्या का पता लगाना होगा, जो विचलन के सभी मूल्यों (d) को विभाजित कर सके। इससे d के मान मूल्य में कमी लाकर आगे की गणना को सरल बनाया जा सकता है। विचलन को पुनः समान गुणांक से भाग दिया जाता है। इस साधारण पद को जिसमें d के मूल्य विभाजित

किए जाते हैं, उन्हें 'dc' से संबोधित किया जाता है, जैसे—  $\frac{d}{c} = d'$

बाद में d' को इस सामान्य पद से गुणा किया जाता है, ताकि अंतिम परिणाम में गणितीय माप प्रभावित न हो। इसमें सम्मिलित चरण निम्न हैं—

$$\text{प्रथम चरण} = d' = \frac{m - A}{c}$$

यहां M = मध्य बिंदु A = कल्पित माध्य

C = समान पद जो एक वर्ग की उच्चतम और न्यूनतम सीमा का अंतर है।



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

**द्वितीय चरण :** समांतर माध्य की गणना हेतु निम्न सूत्र लगाइए—

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c$$

**उदाहरण 6 :** एक गांव के किसानों की कृषि भूमि का औसत आकार का निम्न आंकड़ों द्वारा पता कीजिए। इन विधियों का प्रयोग कीजिए—1. प्रत्यक्ष विधि, 2. पद विचलन विधि।

भूमि का आकार (हैक्टेयर में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
किसानों की संख्या	42	44	58	35	26	15

**हल:**

**तालिका 8.5: असमावेशी वर्गांतर पर भूमि आकार की गणना**

आकार (हैक्टेयर में)	कृषक संख्या (f)	मध्य बिंदु (m)	fm	$d' = \frac{m-35}{10}$	fd'
0-10	42	5	210	-3	-126
10-20	44	15	660	-2	-88
20-30	58	25	1450	-1	-58
30-40	35	35	1225	0	0
40-50	26	45	1170	1	26
50-60	15	55	825	2	30
	<b><math>\sum f = 220</math></b>		<b><math>\sum fm = 5540</math></b>		<b><math>\sum fd' = -216</math></b>

(i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा

$$\bar{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{5540}{220} = 25.2 \text{ हैक्टेयर}$$

(ii) पद विचलन विधि द्वारा

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c = 35 + \left( \frac{-216}{220} \right) \times 10 = 25.2 \text{ हैक्टेयर}$$



### पाठगत प्रश्न 8.3

- नीचे एक कंपनी के 180 कर्मचारियों द्वारा प्रति माह किए गए ओवर टाइम का विवरण दिया गया है—अंकगणितीय माध्य ज्ञात करो

ओवर टाइम (घंटों में)	0-10	10-30	30-40	40-50	50-60
कर्मचारियों की संख्या	10	60	50	40	20

हल :

चूँकि वर्ग अंतराल समान नहीं है, वर्ग अंतराल समान बनाने के लिए आवृत्तियों का समायोजन करना पड़ेगा। इसलिए यह मानना होगा कि सभी का वितरण समान है।

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c = 45 + \left( \frac{-220}{180} \right) \times 10 = 32.778 \text{ घंटे}$$

2. एक कंपनी अपने कारखानों की सुरक्षा में सुधार की योजना बनाती है। इसके लिए 180 सप्ताह के दुर्घटना के आंकड़े प्रस्तुत हैं। आवृत्ति-वितरण निम्न प्रकार समूहबद्ध है—

दुर्घटनाओं की संख्या	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
सप्ताहों की संख्या	10	20	30	50	40	30

प्रतिदिन दुर्घटना संख्या के लिए अंकगणितीय माध्य की गणना करो।

हल :

इस दशा में समावेशी श्रेणी को असमावेशी श्रेणी में बदलना होगा। उच्चतम और न्यूनतम वर्ग सीमा का आधा अंतर अगले वर्ग की न्यूनतम सीमा में जोड़ दिया जाता है। यथा—

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c = 45.5 + \left( \frac{-180}{180} \right) \times 10 = 35.5 \text{ दुर्घटना प्रति सप्ताह}$$

### 8.2.3 अंकगणितीय माध्य की महत्वपूर्ण विशेषताएं

1. एक श्रृंखला के समांतर माध्य तथा विभिन्न मदों के विचलनों का जोड़ 'X' सदैव शून्य होता है।
2. समांतर माध्य श्रृंखला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। इस प्रकार यह सभी मदों का प्रतिनिधित्व करता है।
3. अंकगणितीय माध्य से सभी चरों के विचलनों का योग न्यूनतम होता है।
4. यदि किसी चर को स्थिर मान से गुणा या विभाजित किया जाता है तो माध्य भी उस स्थिर मान से गुणित या विभाजित हो जाएगी।
5. समांतर माध्य एक स्थिर माध्य है, क्योंकि इस पर प्रतिदर्श (Sampling) में होने वाले परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पड़ता है। यह गुण अन्य किसी माध्य में नहीं पाया जाता।



टिप्पणियाँ



टिप्पणियाँ



पाठगत प्रश्न 8.4

उचित उत्तर चुनिए

- व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य से विचलनों का योग जोड़ होता है—
  - सदैव शून्य से अधिक
  - सदैव शून्य से कम
  - शून्य से कभी अधिक कभी कम। यह समंक तत्वों पर निर्भर करता है।
  - सदैव शून्य
- एक समूह 12 अंकों का है। सबसे बड़ा स्कोर 36 अंक अधिक है। इसका स्कोर के माध्य पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
  - यह भी 12 अंक बढ़ जाएगा
  - यह अपरिवर्तनीय रहेगा
  - यह 3 अंकों तक बढ़ेगा
  - यह 36 अंकों तक बढ़ जाएगा
  - कोई उचित तरीका नहीं है, जिससे जाना जा सके कि माध्य कितने बिंदु तक बढ़ेगा?

8.2.4 सम्मिलित माध्य

यदि किसी श्रेणी में मद्दें दो घटकों के संयोजन से ( $N_1$  और  $N_2$ ) बनी हैं तो उसका अनुमान ( $N_1+N_2=N$ ) और माध्य भी उसी प्रकार संयोजन रूप में परिगणित होगा।

‘N’ अनुमान का सम्मिलित माध्य निम्न प्रकार होगा—

$$\text{सम्मिलित अंकगणितीय माध्य } \bar{X} = \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

**उदाहरण 7 :** विद्यार्थियों के तीन समूहों के औसत अंक क्रमश 70, 50 और 30 हैं। इनमें तीन छात्रों के अंक 50, 55 और 45 हैं। ज्ञात कीजिए कि इन 150 छात्रों ने औसत कितने अंक प्राप्त किए।

**हल :** माना इन 150 छात्रों का सामूहिक औसत अंक X है

औसत अंक	$\bar{X}_1 = 50;$	$\bar{X}_2 = 55;$	$\bar{X}_3 = 45$
छात्र संख्या	$N_1 = 70;$	$N_2 = 50;$	$N_3 = 30$

$$\bar{X}_{123} = \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2 + N_3\bar{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$\bar{X}_{123} = \frac{70 \times 50 + 50 \times 55 + 30 \times 45}{70 + 50 + 30} = \frac{7600}{150} = 50.67 \text{ अंक}$$



**पाठगत प्रश्न 8.5**

- कुछ मर्दों का औसत 40 है। यदि दो या अधिक मर्द, जिनका मान 50 और 64 है, इन आंकड़ों में जोड़ा जाए तो औसत बढ़कर 42 बन जाता है। मौलिक समकों की मर्दों की संख्या ज्ञात करो।
- आठ सिक्के एक साथ उछाले गए और जितनी बार वे सिर के बल गिरे, उसे देखा गया। यह क्रिया 256 बार संपन्न हुई।  $x$  की माप की बारंबारता (जितने बार सिर के बल गिरी) नीचे की तालिका में दिखाई गई है। माध्य की गणना प्रत्यक्ष विधि और लघु विधि से कीजिए।

<b>X:</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>f:</b>	1	9	26	59	72	52	29	7	1

- नीचे के आंकड़ों से किसी कंपनी के कर्मचारियों की औसत आयु की गणना कीजिए—

आय (वर्ष) से कम	25	30	35	40	45	50	55	60
कर्मचारियों की संख्या	8	23	51	81	103	113	117	120

**8.2.5 भारित अंकगणितीय माध्य**

सरल समांतर माध्य का अध्ययन करते समय यह मान लिया जाता है कि श्रृंखला में सभी मर्दों का समान महत्व है, जिसमें किसी श्रृंखला के सभी मर्दों को समान महत्व दिया जाता है। किंतु वास्तविक जीवन में ऐसा नहीं होता। वास्तविक जीवन में कुछ मर्दों को अपेक्षाकृत अधिक महत्व दिया जाना चाहिए। जब माध्य की गणना में किसी मर्द को अधिक भार दिया जाता है तो यह उसके महत्व को अंकित करता है। इसी को भारित माध्य कहते हैं। जब मर्दों के महत्व में अंतर होता है तो विश्लेषण कर्ता को चाहिए कि वह देखे कि किस मर्द का भार सबसे अधिक महत्व का है। यदि  $W_1, W_2, W_3 \dots W_N$  श्रृंखला के भार हैं तो भारित माध्य की गणना इस प्रकार होगी—

भारित समांतर माध्य वह है, जिसमें प्रत्येक मर्द को उसके तुलनात्मक महत्व के अनुसार भाग देकर माध्य की गणना की जाती है। जैसे—यदि किसी श्रेणी की मर्दों का भार  $W_1, W_2, W_3 \dots W_N$  हैं तो मर्दों की संख्या  $X_1, X_2, X_3 \dots X_N$  से प्रदर्शित की जाएगी। निम्न सूत्र प्रयोग में लाया जाएगा—

$$\bar{X}_W = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

टिप्पणी : यदि सभी अनुमानों के भार बराबर हैं यानी  $W_1 = W_2 = W_3 \dots W_N = W$  तो भारित

अंकगणितीय माध्य साधारण अंकगणितीय माध्य यानी  $\bar{X}_W = \frac{\sum WX}{\sum W}$  के समान होगा।



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

**उदाहरण 8 :** छात्रवृत्ति प्रदान करने का निर्णय लेने के लिए एक परीक्षा ली गई। विभिन्न विषयों पर भार भिन्न था। तीन विद्यार्थियों ने (100 में) प्रति विषय में जो अंक प्राप्त किए, वे इस प्रकार हैं—

विषय	भार	विद्यार्थी		
		अ	ब	स
गणित	40	60	57	62
इतिहास	30	62	61	67
रसायन विज्ञान	20	55	53	60
अंग्रेजी	10	67	77	49

छात्रवृत्ति प्रदान करने हेतु भारित अंकगणितीय माध्य की गणना कीजिए।

**हल :**

**तालिका 8.6: भारित अंकगणितीय माध्य की गणना**

विषय	भार	विद्यार्थी					
		अ		ब		स	
		अंक ( $X_A$ )	$X_A w_i$	अंक ( $X_B$ )	$X_B w_i$	अंक ( $X_C$ )	$X_C w_i$
गणित	40	60	2400	57	2280	62	2480
इतिहास	30	62	1860	61	1830	67	2010
रसायन विज्ञान	20	55	1100	53	1060	60	1200
अंग्रेजी	10	67	670	77	770	49	490
<b>कुल</b>	<b>100</b>	<b>244</b>	<b>6030</b>	<b>248</b>	<b>5940</b>	<b>238</b>	<b>6180</b>

भारित माध्य का सूत्र प्रयोग करने पर हम पाते हैं—

$$\bar{X}_{wA} = \frac{6030}{100} = 60.3 \text{ अंक}; \quad \bar{X}_A = \frac{244}{4} = 61 \text{ अंक}$$

$$\bar{X}_{wB} = \frac{5940}{100} = 59.4 \text{ अंक}; \quad \bar{X}_B = \frac{248}{4} = 62 \text{ अंक}$$

$$\bar{X}_{wC} = \frac{6180}{100} = 61.8 \text{ अंक}; \quad \bar{X}_C = \frac{238}{4} = 59.5 \text{ अंक}$$

उपरोक्त गणना से यह भासित होता है कि छात्र B को छात्रवृत्ति प्रदान की जानी चाहिए, जैसा सरल समांतर माध्य से विदित होता है। लेकिन भारित माध्य से पता चलता है कि छात्रवृत्ति छात्र C को दी जाएगी, क्योंकि परीक्षा के सभी विषय समान महत्व के नहीं हैं।



## पाठगत प्रश्न 8.6

1. एक बड़ा मॉल अपने प्रथम 10 दिन की बिक्री का अंतिम समायोजन करता है। मॉल उस उत्पाद की 2000 इकाइयों के विक्रय मूल्य का भारित माध्य जानना चाहता है। नीचे की तालिका में अंतिम मूल्य और विक्रय की गई इकाइयों का संबंध दिखाया गया है—

कीमत प्रति इकाई	विक्रय की गई इकाइयों की संख्या	कीमत प्रति इकाई	विक्रय की गई इकाइयों की संख्या
₹ 24.20	354	₹ 24.14	288
₹ 24.10	258	₹ 24.06	240
₹ 24.00	209	₹ 23.95	186
₹ 23.90	133	₹ 23.84	121
₹ 23.82	110	₹ 23.75	101

टिप्पणियाँ



इस उत्पाद की औसत कीमत और भारित औसत बिक्री कीमत दोनों की गणना कीजिए।

## अंकगणितीय माध्य का मूल्यांकन

अंकगणितीय माध्य की गणना करना सरल है। श्रेणी के सभी मूल्यों को माध्य गणना में प्रयुक्त किया जाता है। इसीलिए इसे सभी मदों का प्रतिनिधित्व वाला माना जाता है। सभी मूल्यों पर आधारित होने के कारण माध्य पर सीमांत मूल्यों का जैसे अधिक अथवा कम मूल्य कुछ अधिक प्रभाव पड़ता है। इस प्रकार माध्य कम अथवा अधिक हो सकता है, जिससे संपूर्ण संमकों का अप्रतिनिधित्व हो सकता है। आवृत्तियों के खुले सिरे वाले वितरण में अंकगणितीय माध्य की गणना नहीं की जा सकती।

## 8.3 माध्यिका (Median)

माध्यिका एक स्थैतिक (Positional) मूल्य है, जो श्रेणी को दो समान भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि आधी मदें इससे ऊपर रहती हैं और शेष इस मूल्य के नीचे रहती हैं। कौनार के शब्दों में, “माध्यिका चरों का वह मूल्य है, जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि एक भाग के समस्त मूल्य माध्यिका से अधिक और दूसरे भाग के समस्त मूल्य माध्यिका से कम होते हैं।” माध्यिका को स्थैतिक माध्य भी कहा जाता है, क्योंकि यह एक दिए गए अनुमान की स्थिति में होता है, जो बढ़ते या घटते क्रम में होती है।

अतः किसी श्रेणी के मदों को यदि आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करके मध्य बिंदु का मूल्य निकाला जाए तो वह मूल्य माध्यिका कहलाएगा। माध्यिका को प्रदर्शित करने का संकेत Med. या Md. है।

## 8.3.1 व्यक्तिगत श्रेणी में माध्यिका की गणना

माध्यिका गणना में शामिल चरण निम्न प्रकार हैं—

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

**प्रथम चरण :** आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में प्रस्तुत कीजिए।

**द्वितीय चरण :** माध्यिका किस समंक में अंतर्निहित होगी? इस स्थिति का पता लगाने के लिए

$\frac{N+1}{2}$  का प्रयोग कीजिए।

याद रखिए कि सूत्र  $\frac{N+1}{2}$  केवल माध्यिका की स्थिति के लिए हैं कि वह किस श्रेणी में स्थित है; वह स्वयं में माध्यिका नहीं है। इससे श्रेणी के आकार का ज्ञान होता है।

**उदाहरण 9 :** एक अस्पताल में प्रति घंटे रोगियों के परीक्षण से संबंधित आंकड़े नीचे दिए गए हैं—

जांच किए गए रोगियों की संख्या	10	12	15	20	13	24	17	18
-------------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----

माध्यिका की गणना कीजिए—

**हल :** मदों के आकार को आरोही क्रम में प्रस्तुत कीजिए—

इस प्रकार

जांच किए गए रोगियों की संख्या	10	12	13	15	17	18	20	24
-------------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----

$$\text{माध्यिका} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{वें मद का आकार} = \left( \frac{8+1}{2} \right) \text{वां मद}$$

$$= 4.5 \text{वें मद का आकार}$$

4.5वें मद में माध्यिका निहित है। अतः

$$\text{माध्यिका} = \frac{15+17}{2} = 16$$

इस प्रकार प्रति घंटे किए गए रोगियों की माध्यिका संख्या 16 है।

**उदाहरण 10 :** निम्न अंक संख्या यह प्रदर्शित करती हैं कि किसी पुस्तकालय के पटल से 11 दिनों में सांख्यिकी की पुस्तकें निर्गमित की गईं। 6, 180, 98, 75, 270, 80, 102, 100, 94, 75 और 200. इन संख्याओं की माध्यिका निकालिए।

**हल :** सर्वप्रथम इन संख्याओं को आरोही क्रम में रखते हैं, जैसे—

75, 75, 80, 94, 96, 98, 100, 102, 180, 200 और 270.

अब मदों की कुल संख्या (N) = 11

$$\text{अतः माध्यिका} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{वें मद का आकार}$$



$$= \left( \frac{11+1}{2} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 6 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 98 \text{ पुस्तक प्रतिदिन}$$



### पाठगत प्रश्न 9.7

- यदि किसी मद के आंकड़ों के समूह की संख्या सम है तो माध्यिका—
  - नहीं निर्धारित की जा सकती
  - दो मध्य मदों का औसत मूल्य है
  - माध्य के समान होनी चाहिए
  - दो बीच की मदों का औसत मूल्य है, जबकि सभी समकों को आरोही क्रम से लगाया गया है।
- 6 मदों के वितरण की माध्यिका 21 है। यदि उच्चतम स्कोर 3 बिंदुओं तक बढ़ता है तो माध्यिका होगा—
  - 21
  - 21.5
  - 24
  - अतिरिक्त सूचना के बिना निर्धारित नहीं हो सकता
  - इनमें से कोई नहीं

### 8.3.2 खंडित श्रेणी में माध्यिका की गणना

खंडित श्रेणी में माध्यिका की स्थिति जानने के लिए,  $\frac{N+1}{2}$  वें मद का आकार के लिए हमें संचयी आवृत्तियों पर ध्यान देना चाहिए। माध्यिका की गणना के लिए हमें निम्न चरणों से गुजरना होगा:

**प्रथम चरण :** समकों को आरोही या अवरोही क्रम से लगाइए।

**द्वितीय चरण :** संचयी आवृत्ति ज्ञात करो (c.f)

**तृतीय चरण :** माध्यिका =  $\left( \frac{N+1}{2} \right)$  वें मद का आकार

**चतुर्थ चरण :** अब संचयी आवृत्ति के कॉलम को देखिए और पता कीजिए कि आवृत्ति का योग या तो  $\frac{N+1}{2}$  के बराबर होगा या उसके आगे वाले ऊपरी चर, जिसमें मूल्य निर्धारित किया गया है। यही माध्यिका मूल्य देगा।



## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

**उदाहरण 11:** दिए गए आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए—

अंक	45	55	25	35	5	15
छात्रों की संख्या	40	30	30	50	10	20

हल :

तालिका 8.7: माध्यिका अंकों की गणना

अंक ( आरोही क्रम में )	छात्रों की संख्या (F)	संचयी आवृत्ति (C.F)
5	10	10
15	20	30
25	30	60
35	50	110
45	40	150
55	30	180

$$\text{माध्यिका} = \frac{N+1}{2} \text{ वें मद का आकार} = \frac{180+1}{2} \text{ वां मद} = 90.5 \text{ वां मद}$$

संचयी आवृत्ति, जिसमें 90.5वाँ मद शामिल है = 110

माध्यिका की समान मद जिसमें 110 आता है, वह है 35 अंक

### 8.3.3 अखंडित श्रेणी में माध्यिका की गणना

माध्यिका की गणना के लिए प्रयुक्त चरण इस प्रकार हैं :

**प्रथम चरण :** संचयी आवृत्ति की गणना कीजिए।

**द्वितीय चरण :** इसके बाद  $\left[ \frac{N}{2} \right]$  वां मद ज्ञात कीजिए।

**तृतीय चरण :** अब संचयी आवृत्ति ज्ञात कीजिए, जिसमें  $\left[ \frac{N}{2} \right]$  वां मद हो। इस संचयी आवृत्ति का वर्ग ही माध्यिका वर्ग कहलाता है।

**चतुर्थ चरण :** निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यिका की गणना कीजिए—

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \text{c.f.}}{f} \times i$$

यहां,

$l_1$  = माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

cf = माध्यिका वर्ग से पहले वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

i = माध्यिका वर्ग की ऊपरी व निचली सीमा का अंतर अर्थात् वर्ग अंतराल

**उदाहरण 12 :** निम्न आंकड़ों से साप्ताहिक व्यय की माध्यिका की गणना कीजिए—

साप्ताहिक व्यय (रु. में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
परिवारों की संख्या	14	23	27	21	15

**हल:**

**तालिका 8.8: माध्यिका की गणना**

साप्ताहिक व्यय (रु.में)	परिवारों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (c.f)
0-10	14	14
10-20	23	37
20-30	27	64
30-40	21	85
40-50	15	100

$$\left[ \frac{N}{2} \right] \text{वां मद} = \left[ \frac{100}{2} \right] \text{वां मद} = 50 \text{ वीं मद}$$

50वीं मद के लिए माध्यिका वर्ग = 20-30

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - \text{c.f.}}{f} \times i$$

यहां  $l_1 = 20$ , c.f. = 37, f = 27, i = 10



टिप्पणियाँ



टिप्पणियाँ

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका} &= 20 + \frac{50-37}{27} \times 10 \\ &= 24.815 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

**टिप्पणी :** जब किसी श्रेणी की माध्यिका ज्ञात करते हैं तो श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी बना लिया जाता है। यदि श्रेणी समावेशी हो तो उसे अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित कर लीजिए।



### पाठगत प्रश्न 8.8

1. अद्योलिखित आंकड़ों से व्यक्तियों की आयु माध्यिका का आकलन कीजिए—

आयु (वर्ष में)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
व्यक्तियों की संख्या	70	80	180	150	20

2. छात्रों के अंकों का माध्यिका परिगणित कीजिए—

अंक	40-50	30-40	20-30	10-20	0-10
छात्र संख्या	10	12	40	30	8

#### 8.3.4 माध्यिका की आवश्यक गणितीय विशेषता

माध्यिका से मर्दों के विचलन को जोड़ते समय चिहनों पर कम ध्यान दिया जाता है—

$$\sum |X - Md| \text{ न्यूनतम होता है।}$$

#### माध्यिका का मूल्यांकन

माध्यिका मध्य मूल्य होता है। इस पर सीमांत मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। खुले सिरे वाली आवृत्ति वितरण का भी माध्यिका ज्ञात किया जा सकता है। यह सभी मर्दों के मूल्य पर आधारित नहीं होती।

#### 8.4 चतुर्थक

चतुर्थक वह मूल्य है, जो समग्र वितरण को चार समान भागों में विभाजित करता है। इसीलिए तीन चतुर्थक होते हैं, जैसे— $Q_1$ ,  $Q_2$  और  $Q_3$ , जिन्हें प्रथम चतुर्थक, द्वितीयक चतुर्थक और तृतीय चतुर्थक अथवा क्रमशः निचला चतुर्थक, मध्य चतुर्थक तथा ऊपरी चतुर्थक कह कर पुकारा जाता है।  $Q_1$  (प्रथम चतुर्थक) में श्रृंखला के 25 प्रतिशत मद सम्मिलित होते हैं।  $Q_1$  श्रृंखला को इस तरह से विभाजित करता है, जिससे 25 प्रतिशत मूल्य  $Q_1$  से कम होते हैं और 75 प्रतिशत मूल्य  $Q_1$  से अधिक होते हैं। द्वितीय चतुर्थक या माध्यिका ( $Q_2$ ) श्रृंखला का मध्य मूल्य होती है। तृतीय चतुर्थक या उच्च चतुर्थक ( $Q_3$ ) में 75 प्रतिशत मद होते हैं।  $Q_3$  श्रृंखला को इस तरह से विभाजित करता है, जिससे वितरण के 75 प्रतिशत मद इसके नीचे तथा 25 प्रतिशत मद इसके ऊपर होते हैं।

### चतुर्थक की गणना

चतुर्थक की गणना ठीक उसी प्रकार होती है, जिस प्रकार माध्यिका की गणना की जाती है।

#### 8.4.1 व्यक्तिगत तथा खंडित श्रेणी में चतुर्थक की गणना

$$Q_k = \text{श्रेणी के } \frac{k(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$Q_3 = \text{श्रेणी के } \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

#### 8.4.2 अखंडित श्रेणी

$$Q_k = \text{श्रेणी के } k\left(\frac{N}{4}\right) \text{ वें मद का आकार}$$

$Q_k$  की गणना इस प्रकार की जाती है

$$Q_k = L_1 + \frac{k\left(\frac{N}{4}\right) - cf}{f} \times i$$

यहां  $L_1$  = चतुर्थक वर्ग की निचली सीमा

$L_2$  = चतुर्थक वर्ग की ऊपरी सीमा

$C$  = चतुर्थक वर्ग से पूर्व की संचयी आवृत्ति

$f$  = चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति

**उदाहरण 13 :** प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक की गणना करो—

(क) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 10, 20

(ख) 100, 500, 1000, 800, 600, 400, 7000 and 1200

**हल :** (क) चरों का मूल्य आरोही क्रम में व्यवस्थित है—

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 20 इसलिये  $N = 11$  (मूल्यों की संख्या)

$$\begin{aligned} Q_1 &= \text{श्रेणी के } \frac{(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार} \\ &= \left(\frac{11+1}{4}\right) = 3 \text{ वें मद का आकार} = \text{आकार 3वां मद} = 6 \end{aligned}$$



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

$$Q_3 = \text{श्रेणी के } \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 3 \left( \frac{11+1}{4} \right) = 9 \text{ वें मद का आकार} = \text{आकार 9वां मद} = 13$$

इसीलिए, वांछित  $Q_1$  और  $Q_3$  क्रमशः हैं 6 और 13

(ख) आरोही रूप में चरों का मूल्य रखिए, इस प्रकार—

100, 400, 500, 600, 700, 800, 1000, 1200,  $N = 8$

$$Q_1 = \text{श्रेणी के } \frac{(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \text{श्रेणी के } \frac{(8+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 2.25 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \text{दूसरे मद का आकार} + 0.25 (\text{तीसरी मद} - \text{दूसरी मद})$$

$$= 400 + 0.25 (500 - 400) = 400 + 25 = 425$$

$$Q_3 = \text{श्रेणी के } \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \text{श्रेणी के } \frac{3(8+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 6.75 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 6 \text{ वें मद} + 0.75 (7 \text{ वें मद} - 6 \text{ वें मद}) \text{ का आकार}$$

$$= 800 + 0.75 (1000 - 800)$$

$$= 800 + 150 = 950$$

वांछित  $Q_1$  और  $Q_3$  क्रमशः 425 और 950 हैं।

**उदाहरण 14 :** निम्न से माध्यिका और प्रथम चतुर्थक की गणना कीजिए—

अंक :	0-10	10-30	30-50	50-80	80-90	90-100
छात्र संख्या :	4	12	20	8	4	2

हल : माध्यिका वर्ग निर्धारण हेतु हमें संचयी आवृत्ति की गणना करनी होगी—

तालिका 8.9: माध्यिका वर्ग निर्धारण हेतु संचयी आवृत्ति की गणना

अंक :	0-10	10-30	30-50	50-80	80-90	90-100
छात्र संख्या :	4	12	20	8	4	2
संचयी आवृत्ति	4	16	36	44	48	50



टिप्पणियाँ

माध्यिका ज्ञात करना ∴

यहां N = 50 so N/2 = 25, माध्यिका वर्ग हुआ 30-50

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - c.f}{f} \times i$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका} &= 30 + \frac{25 - 16}{20} \times 20 = 39 \text{ अंक} \\ &= 39 \text{ अंक (माध्यिका)} \end{aligned}$$

प्रथम चतुर्थक की गणना

यहां N = 50; N/4 = 12.5, अतः Q<sub>1</sub> वर्ग 10-30 है।

$$Q_1 = l_1 + \frac{N/4 - cf}{f} \times i$$

$$Q_1 = 10 + \frac{12.5 - 4}{12} \times 20 = 24.16 \text{ अंक (प्रथम चतुर्थक)}$$

## 8.5 बहुलक या भूयिष्ठक

बहुलक (M<sub>0</sub>) किसी श्रेणी के उस मूल्य को कहते हैं, जो श्रृंखला में अधिक बार प्रयुक्त होता है अर्थात् जिसकी सबसे अधिक आवृत्ति होती है। जैसे—जूता निर्माता जानना चाहता है कि किस आकार के जूते की अधिकतम मांग है या कमीज विक्रता देखता है कि किस स्टाइल की कमीज की मांग बार-बार हो रही है। दोनों तथ्यों के जवाब में सर्वप्रिय माप बहुलक ही है। अतः बहुलक वह मूल्य है, जिसकी श्रेणी में सबसे अधिक आवृत्ति होता है।

### 8.5.1 व्यक्तिगत श्रेणी/असमूहित श्रेणी में बहुलक की गणना

इस प्रकार की श्रेणी में मात्र निरीक्षण से ही बहुलक का पता चल जाता है। वह संख्या, जिसकी आवृत्ति अधिकतम हो, वही बहुलक होती है।

**टिप्पणी :** यदि किसी श्रेणी में दो या दो से अधिक संख्या अधिकतम आवृत्ति वाली है, वहां बहुलक की गणना कठिन होती है। इस प्रकार की श्रेणियों को द्वि-बहुलक, त्रि-बहुलक या बहु-बहुलक श्रेणी कहा जाता है।



टिप्पणियाँ

**उदाहरण 15 :** बहुलक की गणना कीजिए—

15, 21, 26, 25, 21, 23, 28, 21

**हल :** यहां बहुलक संख्या 21 है, क्योंकि इसकी आवृत्ति 3 बार हुई है। अन्य की एक बार ही आवृत्ति हुई है।



**पाठगत प्रश्न 8.9**

- किसी श्रेणी में एक ही मूल्य की बार-बार आवृत्ति होना कहलाता है—  
(क) विस्तार (ख) बहुलक (ग) माध्य (घ) माध्यिका
- बहुलक ज्ञात कीजिए—  
12, 15, 18, 26, 15, 9, 12, 27
- किसी श्रेणी की वह नाप, जो प्रायः अधिकतम मूल्यों से प्रभावित होती है, कौन-सी है—  
(क) माध्यिका (ख) बहुलक (ग) माध्य (घ) चतुर्थक
- एक शोधकर्ता ने व्यक्तिगत निदर्श के निम्नलिखित आंकड़े एकत्र किए हैं—  
5 12 6 8 5 6 7 5 12 4  
इनकी माध्यिका है—(क) 5 (ख) 6 (ग) 7 (घ) 8  
बहुलक है— (क) 5 (ख) 6 (ग) 7 (घ) 8
- निम्नांकित में से किसका मूल्य एक से अधिक हो सकता है—  
(क) माध्यिका (ख) चतुर्थक (ग) बहुलक (घ) अंकगणितीय माध्य

**8.5.2 खंडित श्रृंखला में बहुलक की गणना**

खंडित श्रृंखला में भूयिष्ठक (Mode) की गणना करने हेतु निम्न विधियां अपनाते हैं—

**(क) निरीक्षण विधि ( Inspection Method )**

इस विधि के द्वारा जिस मूल्य की सबसे अधिक आवृत्ति होती है, वही मूल्य भूयिष्ठक होता है। यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट है—

**उदाहरण 16 :** बहुलक की गणना कीजिए.:

आयु:(वर्षों)	5	7	10	12	15	18
लड़कों की संख्या :	4	6	9	7	5	3

**हल :** उपरोक्त उदाहरण से हम स्पष्ट रूप से देखते हैं कि भूयिष्ठक 10 है, क्योंकि इसकी आवृत्ति अधिकतम अर्थात् 9 है। 10 यहां 9 बार प्रयुक्त हुआ है।



**(ख) समूहन विधि और विश्लेषण तालिका विधि ( Grouping and Analysis Table Method ):** समूहन विधि का प्रयोग वहां किया जाता है, जहां सबसे अधिक आवृत्ति, पूर्व आवृत्ति और अगली आवृत्ति में अंतर कम हो।

### गणना की प्रक्रिया

समूहन विधि और विश्लेषण तालिका द्वारा बहुलक की गणना हेतु नीचे दिए गए तरीके से तालिका बनाई जाती है—

### समूहन तालिका

समूहन तालिका के 6 स्तंभ (Column) होते हैं—

1. प्रथम स्तंभ : इस स्तंभ में प्रश्न में दी गई आवृत्तियों को लिखा जाता है।
2. दूसरा स्तंभ : इसमें पहले स्तंभ की दो-दो आवृत्तियों का जोड़ दिखाया जाता है।
3. तीसरा स्तंभ : इसमें प्रथम स्तंभ में दी हुई आवृत्तियों में से पहली आवृत्ति को छोड़कर आगे वाली आवृत्तियों में से दो-दो आवृत्तियों का जोड़ किया जाता है।
4. चौथा स्तंभ : इसमें प्रथम स्तंभ में दी हुई आवृत्तियों का तीन-तीन का योग लेते हैं।
5. पांचवां स्तंभ : पांचवें स्तंभ में प्रथम स्तंभ में दी गई आवृत्तियों में से पहली एक को छोड़कर शेष आवृत्तियों में हर तीन आवृत्तियों का जोड़ लिखा जाता है।
6. छठा स्तंभ : इस स्तंभ में प्रथम स्तंभ में दी गई आवृत्तियों में से पहली दो को छोड़कर बाकी आवृत्तियों के तीन-तीन का योग लिखते हैं।
7. अब प्रत्येक स्तंभ में अधिकतम योग पर गोला लगाइए।

समूहीकरण के बाद प्रत्येक स्तंभ का अधिकतम आवृत्ति पर गोला (Circle) लगाकर चिह्नित कर दिया जाता है, जो सरलता से पहचाना जा सके।

### विश्लेषण तालिका

समूहन तालिका के बाद विश्लेषण तालिका बनाई जाती है। विश्लेषण तालिका को तैयार करते समय स्तंभों (Column) को बायीं तरफ तथा माध्यिका के संभाव्य मूल्यों को दाहिने तरफ लिखें। इस तालिका में 6 स्तंभों एवं मूल्यों की सहायता से अधिकतम आवृत्तियों को गोले लगाकर चिह्नित कर गणना की जाती है। जिस मूल्य के सामने अधिकतम चिह्न होते हैं, वही बहुलक कहलाता है।

बहुलक की गणना समूही एवं विश्लेषण तालिका द्वारा :

तालिका 8.10: समूही तालिका

आयु	समूही तालिका					
	I	II	III	IV	V	VI
5	4	10		19		
7	6		15		22	
10	9	16				21
12	7		12	15		
15	5	8				
18	3					



टिप्पणियाँ



टिप्पणियाँ

विश्लेषण तालिका

	5	7	10	12	15	18
I			1			
II			1	1		
III		1	1			
IV	1	1	1			
V		1	1	1		
VI			1	1	1	
<b>कुल</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

बहुलक = 10 वर्ष

8.5.3 अखंडित (सतत) श्रेणी में बहुलक की गणना

अखंडित श्रृंखला में बहुलक की गणना में सबसे पहले श्रृंखला को समान वर्गांतर वाली अपवर्जी श्रृंखला में बदला जाता है। खंडित श्रेणी की तुलना में इस अखंडित श्रेणी में एक कदम और आगे बढ़ाया जाता है। खंडित श्रेणी में मॉडल वर्ग निरीक्षण द्वारा पता कर लिया जाता है या समूह और विश्लेषण विधि से तय कर लिया जाता है। यहां इसका पता लगाने के लिए निम्न कदम उठाने होते हैं—

1. अधिकतम आवृत्तियों के द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण करना होता है।
2. गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\text{बहुलक } (M_0) = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

यहां,  $L_1$  भूयिष्ठक वर्ग की निम्नतम सीमा

$f_1$  भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

$f_0$  भूयिष्ठक वर्ग से पहले वर्ग की आवृत्ति

$f_2$  भूयिष्ठक वर्ग से अगले वर्ग की आवृत्ति

$i$  भूयिष्ठक वर्ग का वर्गांतर

**टिप्पणी :** (i) इस सतत श्रेणी में वर्गांतर समान होने चाहिए और भूयिष्ठक की गणना करते समय श्रेणी को अपवर्जी (Exclusive) श्रेणी होना चाहिए। यदि दी गई श्रेणी समावेशी (Inclusive) श्रेणी है और असमान वर्ग अंतराल वाली है तो उसे अपवर्जी श्रेणी में बदल लीजिए, वर्ग अंतराल समान कर लीजिए।

(ii) यदि मध्य बिंदु दिए गए हैं तो वर्ग अंतराल प्राप्त कर लीजिए।

**उदाहरण 17 :** दिए गए आंकड़ों से भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए—

आयु (वर्षों में) :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
व्यक्ति की संख्या :	50	70	80	150	180	120	70	50

हल :

तालिका 8.11: भूयिष्ठक की गणना  
समूहन तालिका

आयु	समूहन तालिका					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
20-25	50	120		200		
25-30	70		150		300	
30-35	80	230				410
35-40	150		330	450		
40-45	180	300			370	
45-50	120		190			240
50-55	70	120				
55-60	50					

विश्लेषण तालिका

Column	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
1					1			
2					1	1		
3				1	1			
4				1	1	1		
5					1	1	1	
6			1	1	1			
योग	0	0	1	3	6	3	1	0

मॉडल वर्ग 40-45 है। निम्न सूत्र से बहुलक ज्ञात कीजिए।

$$\text{बहुलक } (M_0) = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

यहां  $L_1 = 40$ ,  $f_1 = 180$ ,  $f_0 = 150$ ,  $f_2 = 120$ ,  $i = 5$

$$\text{बहुलक } (M_0) = 40 + \frac{180 - 150}{(2 \times 180) - 150 - 120} \times 5$$

$$= 40 + \left[ \frac{30}{90} \right] \times 5 = 41.67 \text{ वर्ष}$$

**उदाहरण 18 :** निम्न आंकड़ों से मजदूरी का बहुलक ज्ञात करो—

दैनिक वेतन (रु. में):	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
कामगारों की संख्या:	1	3	8	12	7	5



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

**हल :** यहां अधिकतम आवृत्ति 12 है, जो 35-40 वाले वर्ग की है। यह वर्ग बहुलक वर्ग है।

$$\text{बहुलक } (M_o) = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

यहां  $L_1 = 35$ ,  $f_1 = 12$ ,  $f_0 = 8$ ,  $f_2 = 7$ ,  $i = 5$

$$Z = 35 + \frac{12 - 8}{(2 \times 12) - 8 - 7} \times 5$$

$$= 35 + \left[ \frac{4}{9} \right] \times 5 = 37.22$$

बहुलक मजदूरी = रुपये 37.22

### बहुलक का मूल्यांकन

बहुलक अधिकतम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता और इसकी गणना खुले सिरे वाले आवृत्ति वितरण में भी की जा सकती है।

**उदाहरण 19 :** नीचे की तालिका में निर्माण कार्य में लगे कामगारों की दैनिक मजदूरी के दैव निदर्शन के आंकड़े दिए गए हैं। उनसे माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक निकालिए।

दैनिक वेतन (रु.)	कामगारों की संख्या
200 - 399	5
400 - 599	15
600 - 799	25
800 - 999	30
1000 - 1199	18
1200 - 1399	7
योग	100

**हल :**

तालिका 8.12 : माध्य गणना

दैनिक वेतन (रु.)	कामगारों की संख्या (fx)	मध्य बिंदु m	fx
200 - 399	5	299.5	1,497.5
400 - 599	15	499.5	7,492.5
600 - 799	25	699.5	17,489.5
800 - 999	30	899.5	26,985.0
1000 - 1199	18	1,099.5	19,791.0
1200 - 1399	7	1,299.5	9,096.5
योग	100		82,352.0

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{82,352.0}{100} = 823.52$$

मजदूरी माध्य = रुपये 823.52

माध्यिका और बहुलक की गणना करने के लिए इस श्रेणी को समावेशी श्रेणी से अपवर्जी श्रेणी में बदलना होगा।

तालिका 8.13: माध्यिका गणना के लिए

दैनिक वेतन (रु.)	कामगारों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (CF)
199.5 – 399.5	5	5
399.5 – 599.5	15	20
599.5 – 799.5	25	45
799.5 – 999.5	30	75
999.5 – 1199.5	18	93
1199.5 – 1399.5	7	100
योग	100	

$$\text{Median} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - c.f}{f} \times i$$

यहां N = 100 अतः N/2 = 50, अतः माध्यिका वर्ग = 799.5 – 999.5

$$\text{Median} = 799.5 + \frac{50 - 45}{30} \times 200 = 832.83 \text{ रुपये}$$

अतः दैनिक वेतन = 832.83 रुपये

तालिका 8.14: बहुलक गणना

समूहन तालिका

दैनिक वेतन (रु. में)	समूहन तालिका					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
199.5-399.5	5	20		45		
399.5-599.5	15		40		70	
599.5-799.5	25	55				73
799.5-999.5	30		48	55		
999.5-1199.5	18	25				
1199.5-1399.5	7					



टिप्पणियाँ

## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

### विश्लेषण तालिका

कॉलम स्तम्भ	199.5- 399.5	399.5- 599.5	599.5-799.5	799.5-999.5	999.5-1199.5	1199.5-1399.5
1				1		
2			1	1		
3				1	1	
4				1	1	1
5		1	1	1		
6			1	1	1	
Total	0	1	3	6	3	1

यहां बहुलक वर्ग है 799.5 – 999.5 यहीं बहुलक हैं

$$\text{बहुलक } (M_0) = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

यहां  $l_1 = 799.5, f_1 = 30, f_0 = 25, f_2 = 18, i = 200$

$$\text{बहुलक } (M_0) = 799.5 + \frac{30 - 25}{(2 \times 30) - 25 - 18} \times 200$$

$$= 799.5 + \left[ \frac{5}{17} \right] \times 200 = 858.32 \text{ रुपये}$$

अतः बहुलक मजदूरी = 858.32 रुपये



### आपने क्या सीखा

- केन्द्रीय प्रवृत्तियों की माप एक वचन मूल्य को नहीं प्रदर्शित करतीं, यह समग्र श्रेणी को व्यक्त करती हैं।
- केन्द्रीय प्रवृत्तियों की निम्न मापें हैं—
  - अंक गणितीय माध्य
    - सरल अंकगणितीय माध्य
    - भारित अंकगणितीय माध्य
  - माध्यिका

- चतुर्थक
- बहुलक
- व्यक्तिगत श्रेणी में अंकगणितीय मध्य की गणना
  - प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

- कल्पित माध्य विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N}$$

यहां  $\bar{X}$  = अंकगणितीय माध्य, A = कल्पित माध्य  
 $\sum d$  = विचलनों का योग, N = मदों का योग

- खंडित श्रेणी में माध्य की गणना
  - प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

$\sum f$  = आवृत्तियों का योग

- कल्पित माध्य विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

यहां A = कल्पित माध्य, d = X - A और N =  $\sum f$

- पद विचलन विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c$$

- अखंडित (सतत) श्रेणी में माध्य

- प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{X} = \frac{\sum fm}{\sum f}$$

मध्य बिंदु (M) =  $\frac{\text{निम्न सीमा} + \text{उच्च सीमा}}{2}$

- कल्पित माध्य विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

A = कल्पित माध्य d = M - A



## मॉड्यूल - 4

सांख्यिकी उपकरण



टिप्पणियाँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

$f$  = आवृत्तियाँ

—पद विचलन विधि

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c$$

$$\text{यहां } d' = \frac{m - A}{c}$$

$M$  = मध्य बिंदु  $A$  = अनुमानित माध्य

$C$  = उभयनिष्ठ वर्ग, जो ऊपरी और निचली वर्ग सीमाओं का अंतर है।

- दो श्रेणियों की सामूहिक अंकगणितीय माध्य का सूत्र है—

$$\text{सामूहिक अंकगणितीय माध्य} = \bar{X} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

यहां  $N_1$  और  $N_2$  दोनों श्रेणियों के मदों की संख्या

$\bar{X}_1$  और  $\bar{X}_2$  दोनों श्रेणियों की माध्य

- भारित अंकगणितीय माध्य का सूत्र  $\frac{\sum WX}{\sum W}$

$W = W_1, W_2, W_3, \dots$  श्रेणी के मदों का भार

$X = X_1, X_2, X_3, \dots$  श्रेणी के मदों का माध्य

- माध्यिका एक स्थितिक मूल्य है, जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित करती है। इसमें आधे मूल्य इसके ऊपर और शेष आधे इसके नीचे होते हैं।
- व्यक्तिगत तथा खंडित श्रेणी में माध्यिका निकालने का सूत्र है—

$$\text{माध्यिका} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

- जब मदों संख्या सम हो तो

$$\text{माध्यिका} = \left[ \frac{\left( \frac{N}{2} \right) \text{ वें मद का आकार} + \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \text{ वें मद का आकार}}{2} \right]$$



- संचयी श्रेणी में माध्यिका इस प्रकार है :

माध्यिका =  $\left(\frac{N}{2}\right)$  वें मद का आकार

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - c.f}{f} \times i$$

$L_1$  माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

cf संचयी आवृत्ति

f माध्यिका वर्ग की आवृत्तियां

i माध्यिका वर्ग का अंतराल

- चतुर्थक वह मूल्य है, जो समग्र वितरण को चार समान भागों में विभाजित करता है। यह तीन होते हैं, जैसे— $Q_1$ ,  $Q_2$  और  $Q_4$ , जिन्हें प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय चतुर्थक का नाम दिया जाता है। इन्हें ही निचला चतुर्थक, मध्य चतुर्थक और ऊपरा चतुर्थक कहते हैं।
- व्यक्तिगत और खंडित श्रेणी में चतुर्थक की गणना की जाती है—

$$Q_k = \frac{k(N+1)}{4} \text{ वें मद का आकार}$$

- सतत (अखंडित श्रेणी) में चतुर्थक निकालने का सूत्र है—

$$Q = l_1 + \frac{k\left(\frac{N}{4}\right) - cf}{f} \times i$$

$L_1$  = चतुर्थक वर्ग की निचली सीमा

$L_2$  = चतुर्थक वर्ग की ऊपरी सीमा

- बहुलक वह मूल्य है, जिसके इर्द-गिर्द अधिकतम मद होते हैं।
- अखंडित श्रेणी और व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निरीक्षण मात्र से मालूम हो जाता है, जो अधिक बार आए वही बहुलक।
- खंडित और अखंडित (सतत) श्रेणी में बहुलक वह होता है, जिस चर की आवृत्तियां अधिकतम होती हैं।



टिप्पणियाँ



**पाठांत अभ्यास**



टिप्पणियाँ

**माध्य**

1. एक कारखाने को 90 मजदूरों की दैनिक मजदूरी का औसत 60 रुपये है। गैर-तकनीकी मजदूर का औसत 45 रुपये है। एक-तिहाई मजदूर तकनीकी हैं। तकनीकी मजदूरों की दैनिक मजदूरी का औसत बताइए।
2. दो आवृत्ति वितरण नीचे दिए गए हैं। पहले वितरण की माध्य 25.4 और दूसरे को 32.5 है तो x और y मूल्यों की गणना कीजिए।

वर्गान्तर	वितरण I	वितरण II
10-20	20	4
20-30	15	8
30-40	10	4
40-50	x	2x
50-60	y	y

3. 99 मदों की माध्य 55 है। 100वें मद का मूल्य 99 अर्थात् 100 मदों के माध्य से अधिक। 100वें मद का क्या मूल्य होगा।

**माध्यिका**

4. किसी कार्य को संपन्न करने 18 मजदूरों, जो समय अवधि ली उसके आंकड़े इस प्रकार है—

समय	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
मजदूरों की संख्या	3	8	4	2	1

माध्यिका समय तथा प्रथम और तृतीय चतुर्थक की गणना कीजिए—

5. निम्नांकित आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए—

मध्य मूल्य	115	125	135	145	155	165	175	185	195
आवृत्ति	6	25	48	72	116	60	38	22	3

6. नीचे दिए गए वितरण में यदि  $Q_1 = 23.125$  और  $Q_3 = 43.5$  है तो माध्यिका मूल्य क्या होगा?

दैनिक वेतन	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
मजदूरों की संख्या	5	-	20	30	-	10

7. 25 मर्दों की माध्य तथा माध्यिका क्रमशः 143.144 तथा 147 है। 6 मर्दों को और इनमें मिला दिया जाता है, जिनका मूल्य 132, 125, 130, 160, 165 और 157 हैं। इन 31 मर्दों का सामूहिक विधि से माध्य और माध्यिका की गणना करो।

**भूयिष्ठक अथवा बहुलक**

8. निम्नांकित आंकड़ों का भूयिष्ठक बताइए—

7, 12, 8, 5, 9, 6, 10, 9, 4, 9, 9

9. निम्न श्रेणी का बहुलक मूल्य निर्धारित कीजिए—

मूल्य	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
आवृत्ति	7	15	21	38	34	34	11	19	10	38	5	2

10. अद्योलिखित वेतन वितरण के आंकड़ों का माध्यिका तथा बहुलक मूल्य क्रमशः 33.5 रुपये और 34 रुपये हैं। तालिका में से तीन आवृत्तियां नदारत हैं, उनका मूल्य बताइए—

वेतन (रु. में)	आवृत्तियां
0-10	10
10-20	10
20-30	?
30-40	?
40-50	?
50-60	6
60-70	4
योग	230

11. एक विश्वविद्यालय में विविध श्रेणियों में काम करने वाले कर्मचारियों के मासिक वेतन के आंकड़े निम्नलिखित हैं। इनकी मासिक वेतन का भूयिष्ठक की गणना कीजिए—

श्रेणी	मासिक वेतन रु. में	कर्मचारियों की संख्या
प्रधानाचार्य	10,00,000	1
उप प्रधानाचार्य	2,50,000	1
वरिष्ठ प्राध्यापक	75,000	5
प्राध्यापक	30,000	8
सहायक प्राध्यापक	20,000	13
कनिष्ठ प्राध्यापक	18,000	9



टिप्पणियाँ



8.7

1. (घ)
2. (क) माध्यिका समान रहेगी।

8.8

1. 32.78 वर्ष
2. 23 अंक

8.9

1. (ख)
2. बहुलक 12 और 15 दो हैं, क्योंकि दोनों दो बार प्रयुक्त हुए हैं।
3. (ग)
4. (ख)
5. (ग)



टिप्पणियाँ